# 8. Интегрирование и дифференцирование

Дифференцирование в Octave осуществляется в технике символьных переменных. В функциях интегрирования реализованы различные численные алгоритмы.

## *8.1* Вычисление производной

*Дифференцирование* в Octave осуществляется с помощью функции

`differentiate(f(a,x [, n])`

где `a` — символьное выражение, `x` — переменная дифференцирования, `n` — порядок дифференцирования (при `n=1` параметр можно опустить). Иными словами функция вычисляется `n`-ю производную выражения `a` по переменной `x`.

Напомним, что для работы с символьными переменными в Octave должен быть подключен специальный пакет расширений **octave-symbolic**. Процедура установки пакетов расширений описана в первой главе. Техника работы с символьными переменными описана в п. 2.7 второй главы.

*Производной функции* $f(x)$ в точке $x_0$ называется предел, к которому стремится отношение бесконечно малого приращения функции к соответствующему бесконечно малому приращению аргумента. Геометрический смысл этого понятия заключается в том, что если к графику функции $f(x)$ провести касательную в точке $x_0$, то ее угловой коэффициент, будет равен значению производной в этой точке $k=f'(x)$. Следовательно, уравнение касательной к линии в заданной точке имеет вид: $y(x)=f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$.

ЗАДАЧА 8.1. Записать уравнение касательной к функции $f(x)=\frac{3x^2-7}{2x+1}$ в точке $x_0=-1$.

Из листинга 8.1 видим, что уравнение касательной к функции в заданной точке имеет вид $y(x)=14x+18$.

```
>>> clear all;
x0=-1;
symbols
x = sym ("x");
f=(3*x^2-7)/(2*x+1);
%Первая производная от заданной функции
f1=differentiate(f,x)
%Уравнение касательной:
%k=subs(f1,x,x0), f(x0)=subs(f,x,x0)
y=subs(f1,x,x0)*(x-x0)+subs(f,x,x0)
>>>f1 =
(6.0)*x*(1.0+(2.0)*x)^(-1)-
           (2.0)*(-7.0+(3.0)*x^(2.0))*(1.0+(2.0)*x)^(-2)
>>>y =
18.0-9.029803704631804845E-19*I+
                     (14.0-6.0198691364212032297E-19*I)*x
```

Листинг 8.1

На рис. 8.1 представлены графики заданной функции и ее касательной. Рисунок построен с помощью команд из листинга 8.2.

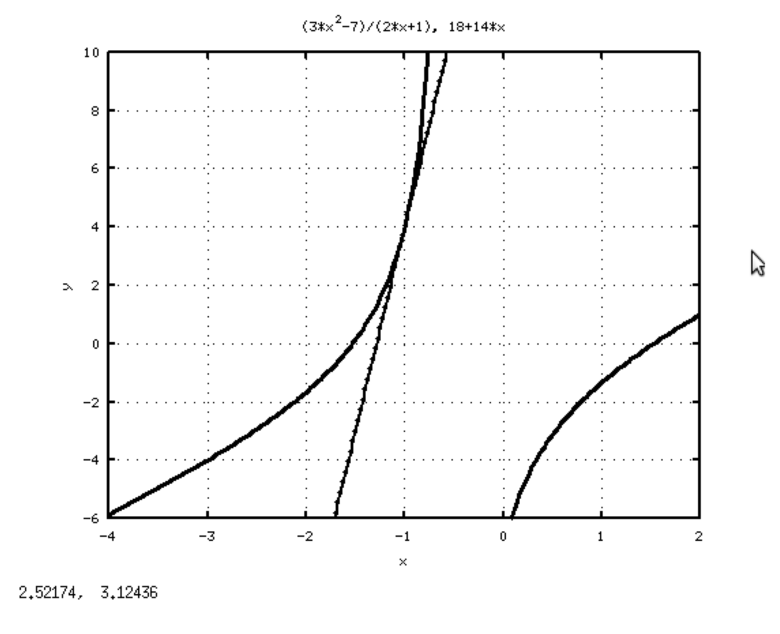


Рисунок *8.1*. График функции и ее касательной

```
clear all;
clf;cla;
symbols
x=sym("x");
L1=ezplot('(3*x^2-7)/(2*x+1)');
set(L1,'LineWidth',3,'Color','k')
hold on
L2=ezplot('18+14*x');
set(L2,'LineWidth',2,'Color','k','Marker','o')
set(gca,'xlim',[-4,2]);
set(gca,'ylim',[-6,10]);
set(gca,'xtick',[-4:2]);
set(gca,'ytick',[-6:2:10]);
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
title('(3*x^2-7)/(2*x+1), 18+14*x');
```

Листинг 8.2

ЗАДАЧА 8.2. Найти $f'(x)=\frac{5\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$ и $f'(x)=tg(\sqrt[3]{\ln(x)})$ .

Решение задачи показано в листингах 8.3 и 8.4 соответственно.

```
>>> clear all;
symbols
x = sym ("x") ;
f=(5*Sin(2*x))/Sqrt(Cos(2*x));
f1=differentiate(f,x)
>>>f1 =
(5.0)*sin((2.0)*x)^2*cos((2.0)*x)^(-3/2)+
                                (10.0)*sqrt(cos((2.0)*x))
```

Листинг 8.3

```
>>> clear all;
```

```
symbols
x = sym ("x") ;
f=Tan(Log(x)^(1/3));
f1=differentiate(f,x)
>>>f1 =
(0.333)*(1+tan(log(x)^(0.333))^2)*x^(-1)*log(x)^(-0.666)
```

Листинг 8.4

Если функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями $x=\phi(t), y=\psi(t)$, то производная вычисляется по формуле $y'(x)=\frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}=\frac{y_t}{x_t}$.

ЗАДАЧА 8.3. Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{Bmatrix} x(t)=3\cos^3(t) \\ y(t)=3\sin^3(t) \end{Bmatrix}.$$

Листинг 8.5 содержит решение задачи.

```
>>> clear all;
symbols
t = sym ("t") ;
x=3*Cos(t)^3;
y=3*Sin(t)^3;
xt=differentiate(x,t);
yt=differentiate(y,t);
f=yt/xt
>>>f =
-sin(t)*cos(t)^(-1.0)
```

Листинг 8.5

ЗАДАЧА 8.4. Найти производные $f''(x)=\ln(\cos(x))$ (листинг 8.6), $f^{IV}(x)=\tan(x)$ (листинг 8.7).

```
>>> clear all;
symbols
x = sym ("x") ;
f=Log(Cos(x));
differentiate(f,x,2)
>>>ans =
-1-cos(x)^(-2)*sin(x)^2
```

Листинг 8.6

```
>>> clear all;
symbols
x = sym ("x") ;
f=Tan(x);
differentiate(f,x,4)
>>>ans =
16*(1+tan(x)^2)^2*tan(x)+8*(1+tan(x)^2)*tan(x)^3
```

Листинг 8.7

ЗАДАЧА 8.5. Найти производную $y''(x)$ функции, заданной параметрически

$$\begin{Bmatrix} x(t)=t-\sin(t) \\ y(t)=1-\cos(t) \end{Bmatrix}.$$

Выражение для вычисления второй производной параметрической функции:

$$y''(x)=\left(\frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}\right)'=\frac{\phi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{(\phi'(t))^2}.$$

В листинге 8.8 представлено решение задачи

```
>>> clear all;
symbols
t = sym ("t") ;
x=t-Sin(t);
y=1-Cos(t);
xt=differentiate(x,t);
yt=differentiate(y,t);
xt2=differentiate(x,t,2);
yt2=differentiate(y,t,2);
f=(xt*yt2-yt*xt2)/xt^2
>>>f =
-(1-cos(t))^(-2.0)*(sin(t)^2+(-1+cos(t))*cos(t))
```

Листинг 8.8

## *8.2* Исследование функций

Понятие производной тесно связано с *задачей исследования функции*. Дадим несколько определений.

Если производная функции $f(x)$ положительна на всем интервале $[a,b]$, то функция на нем *возрастает*, если всюду отрицательна, то $f(x)$ *убывает*.

ЗАДАЧА 8.6. Построить график функции $f(x)=1-2x-x^2$ и ее производной. Исследовать функцию на возрастание и убывание.

Вычислим производную заданной функции:

```
symbols
x=sym("x");
f=1-2*x-x^2;
differentiate(f,x)
>>>ans =
-2.0-(2.0)*x
```

Листинг 8.9

С помощью команд листинга 8.10 построим график заданной функции и ее производной.

```
clf;cla;
L1=ezplot('1-2*x-x^2');
set(L1,'LineWidth',3,'Color','k')
hold on
L2=ezplot('-2-2*x');
set(L2,'LineWidth',2,'Color','k')
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
title('1-2x-x^2, -2-2x')
```

Листинг 8.10

На рис. 8.2 видим, что там, где $y=f'(x)$ принимает положительные значения, $f(x)$ возрастает, соответственно при отрицательных значениях $y=f'(x)$ функция $f(x)$ убывает.

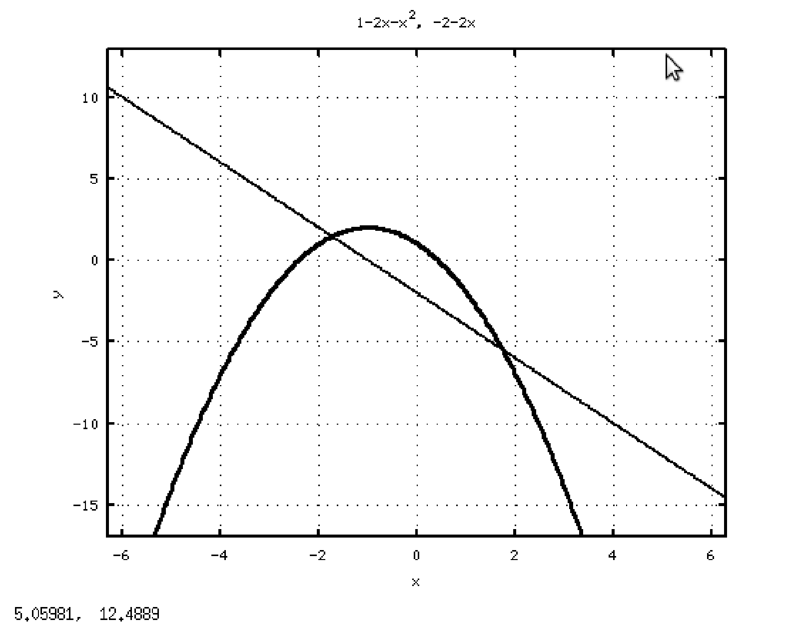


Рисунок *8.2*. Исследование функции на возрастание и убывание

Говорят, что непрерывная функция $f(x)$ имеет *максимум в точке* $x=a$, если в достаточной близости от этой точки производная $f'(x)$ положительна слева от *a* и отрицательна справа от *a*. Если наоборот, то $f(x)$ имеет *минимум в точке* $x=a$. Максимум и минимум объединяют названием *экстремум*. Если первая производная в этой точке $f'(a)$ либо равна нулю, либо не существует, то в этой точке может быть экстремум.

ЗАДАЧА 8.7. Исследовать функцию $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ на экстремум.

Найдем производную функции:

```
clear all;
symbols
x=sym("x");
f=x^3/3-2*x^2+3*x+1;
%Производная от функции f(x)
y=differentiate(f,x)
>>>y = 3.0+x^(2.0)-(4.0)*x
```

Листинг 8.11

Изобразим функцию и ее производную на графике и найдем корни уравнения $f'(x)=0$ с помощью команд листинга 8.12.

```
clf;cla;
L1=ezplot('x^3/3-2*x^2+3*x+1');
set(L1,'LineWidth',3,'Color','k')
hold on
L2=ezplot('3.0+x^(2.0)-(4.0)*x');
set(L2,'LineWidth',2,'Color','k')
set(gca,'xlim',[-2,5]);
set(gca,'ylim',[-5,5]);
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
title('x^3/3-2x^2+3x+1, 3+x^2-4x')
```

```
%Корни уравнения   f'(x)=0
x1 = symfsolve(y,1)
x2 = symfsolve(y,3)
>>>x1 =  1
>>>x2 =  3
```

Листинг 8.12

На рис. 8.3 и в листинге 8.12 видно, что первая производная обращается в ноль в точках 1 и 3. При переходе через точку 1 $f'(x)$ меняет знак с + на −, следовательно, это точка максимума функции $f(x)$, а в точке 3 знак первой производной меняется с − на +, то есть это точка минимума.

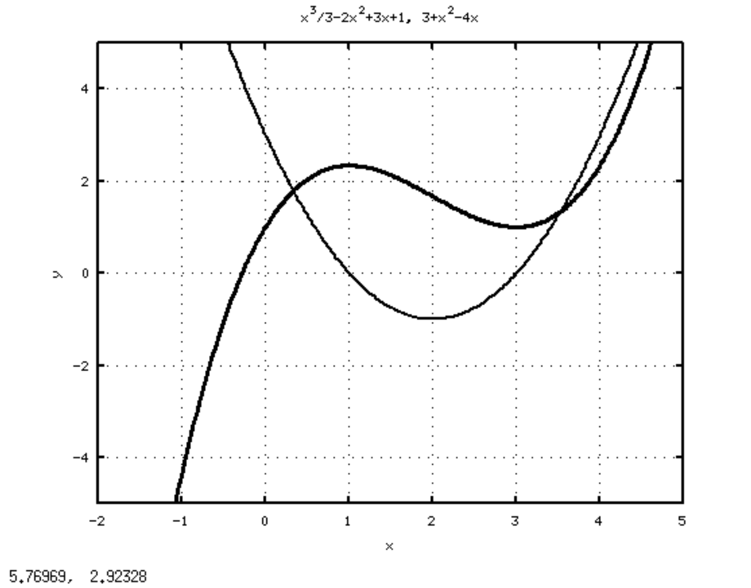


Рисунок *8.3*. Исследование функции на экстремум

График функции называется *выпуклым на промежутке* $[a,b]$, если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала. Если же график функции лежит ниже касательной, то он называется *вогнутым*. Функция будет *выпуклой на интервале* $[a,b]$, если вторая производная $f''(x)$ на нем положительна. И наоборот, если вторая производная отрицательна, то *функция вогнута*. Если же вторая производная равна нулю в некоторой точке *a*, а слева и справа от нее имеет значения разных знаков, то точка *a – точка перегиба*.

ЗАДАЧА 8.8. Определить точки перегиба функции $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2+1}$.

Найдем вторую производную заданной функции. Построим графики функции и ее второй производной. Определим точки в которых вторая производная обращается в ноль (листинг 8.13).

```
>>> clear all;
symbols
x=sym("x");
f=(3*x-2)/(x^2+1);
y=differentiate(f,x,2)
>>>y =
-(2.0)*(1.0+x^(2.0))^(-2)*(-2.0+(3.0)*x)-
            (12.0)*(1.0+x^(2.0))^(-2)*x+
            (8.0)*(1.0+x^(2.0))^(-3)*x^2*(-2.0+(3.0)*x)
```

```
clf;cla;
L1=ezplot('(3*x-2)/(x^2+1)');
set(L1,'LineWidth',4,'Color','k')
hold on
L2=ezplot('-(2.0)*(1.0+x^(2.0))^(-2)*(-2.0+(3.0)*x)-
           (12.0)*(1.0+x^(2.0))^(-2)*x+
           (8.0)*(1.0+x^(2.0))^(-3)*x^2*(-2.0+(3.0)*x)');
set(L2,'LineWidth',2,'Color','k')
set(gca,'xlim',[-5,5]);
set(gca,'ylim',[-5,7]);
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
title('  ')
x1 = symfsolve(y,-1)
x2 = symfsolve(y,0)
x3 = symfsolve(y,2)
>>>x1 = -1.1411
>>>x2 =  0.19855
>>>x3 =  2.9425
```

Листинг 8.13

Иллюстрации приведены на рис. 8.4. Исследование второй производной функции $f''(x)$ показывает, что она определена на всей числовой оси и обращается в нуль в трех точках $x_1=-1.1411, x_2=0.19855, x_3=2.9425$, причем при переходе через них она меняет знак. Следовательно, на интервале $(-\infty, x_1)$ функция $f(x)$ вогнутая, так как $f''(x)<0$, на $(x_1, x_2)$ – выпуклая ( $f''(x)>0$ ), на $(x_2, x_3)$ – вогнутая ( $f''(x)<0$ ) и на $(x_3, +\infty)$ опять выпуклая, потому что $f''(x)>0$.

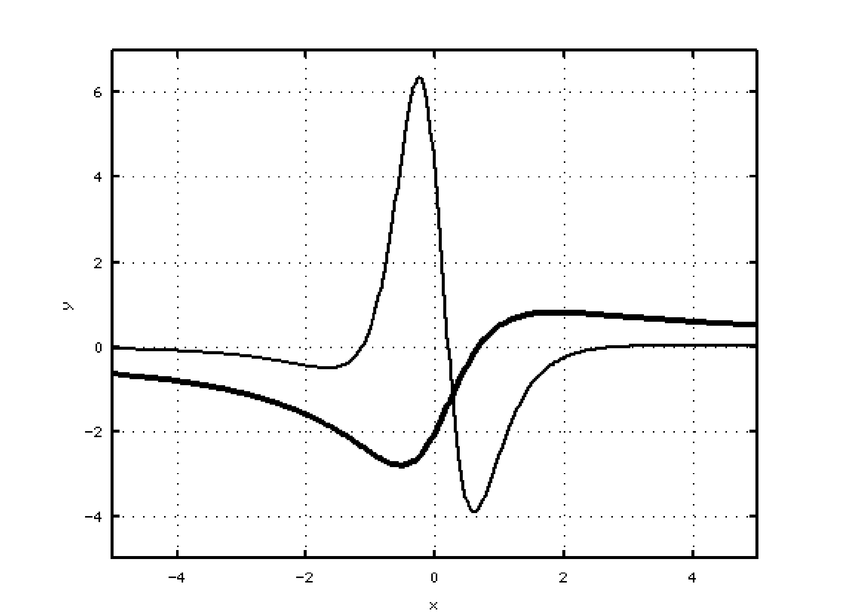


Рисунок *8.4.* Определение точки перегиба функции

## *8.3* Численное интегрирование

Пусть дана функция $f(x)$, известно, что она непрерывна на интервале $[a, b]$ и уже определена ее первообразная $F(x)$, тогда *определенный интеграл* от этой функции можно вычислить в пределах от *a* до *b* по *формуле Ньютона–Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad ,$$

где $F'(x) = f(x)$ .

ЗАДАЧА 8.9. Вычислить определенный интеграл $I = \int_2^5 \sqrt{2x-1}$ .

К сожалению в Octave не предусмотрены средства символьного интегрирования, поэтому обратимся к таблице интегралов и найдем, что

$$I = \int_2^5 \sqrt{2x-1} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(2x-1)^2} + C \quad .$$

Теперь вычислим интеграл по формуле Ньютона–Лейбница:

```
>>> clear all;
%Функция, определяющая подынтегральное выражение
%x — переменная интегрирования,
%C — постоянная интегрирования.
function y=F(x,C)
y=1/3*(2*x-1)^(3/2)+C;
end;
a=2; b=5;
%Вычисление интеграла по формуле Ньютона-Лейбница
I=F(b,0)-F(a,0)
>>>I =  7.2679
```

Листинг 8.14

На практике часто встречаются интегралы с первообразной, которая не может быть выражена через элементарные функции или является слишком сложной, что затрудняет, или делает невозможным, вычисления по формуле Ньютон-Лейбница. Кроме того, нередко подынтегральная функция задается таблицей или графиком и тогда понятие первообразной вообще теряет смысл. В этом случае, большое значение имеют *численные методы интегрирования*, основная задача которых заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании значений подынтегральной функции.

Численное вычисление определенного интеграла называют *механической квадратурой*. Формулы, соответствующие тому или иному численному методу приближенного интегрирования называют *квадратурными*. Подобное название связано с *геометрическим смыслом определенного интеграла*: значение определенного интеграла

$$y = \int_a^b f(x)dx, \, f(x) \neq 0 \quad ,$$

равно площади квадрата, которая в свою очередь, совпадает с площадью криволинейной трапеции с основаниями $[a,b]$ и $f(x)$ .

Вообще говоря, классические учебники по численной математике предлагают не мало методов интегрирования, но здесь мы рассмотрим только те методы, которые имеют непосредственное отношение к функциям Octave.

### 8.3.1 Интегрирование по методу трапеций

Изложим геометрическую интерпретацию *интегрирования по методу трапеций*. Для этого участок интегрирования $[a,b]$ разобьем точками на *n* равных частей (рис. 8.5), причем $x_0 = a, x_n = b$ .

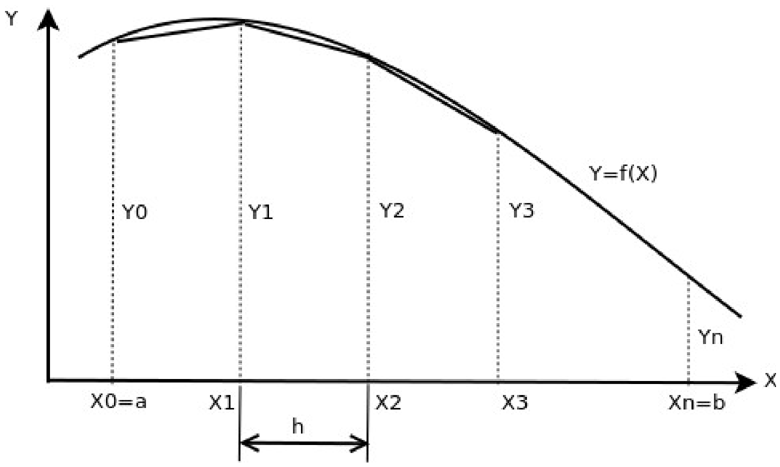


Рисунок *8.5*. Геометрическая интерпретация метода трапеций

Тогда длина каждой части будет равна $h=\dfrac{b-a}{n}$ , а значение абсциссы каждой из точек разбиения можно вычислить по формуле $x_i=x_0+i\,h,\,i=1,n-1$ . Теперь из каждой точки $x_i$ проведем перпендикуляр до пересечения с кривой $f(x)$ , а затем заменим каждую из полученных криволинейных трапеций прямолинейной. Приближенное значение интеграла будем рассматривать как сумму площадей прямолинейных трапеций, причем площадь отдельной трапеции составляет $S=\dfrac{y_{i-1}+y_i}{2}h$ , следовательно, площадь искомой фигуры вычисляют по формуле:

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n} S_i=\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}-y_i)=h\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i \quad .$$

Таким образом, получена *квадратурная формула трапеций* для численного интегрирования:

$$I=\int\limits_a^b f(x)dx=h\frac{f(a)+f(b)}{2}+\int\limits_{i=1}^{n-1} f(x_i) \quad .$$

Функций `trapz` и `cumtrapz` реализуют численное интегрирование по методу трапеций в Octave.

*Площадь фигуры под графиком функции* $y(x)$ , в котором все точки заданы векторами `x` и `y`, вычисляет команда `trapz(x, y)`.

Если вызвать функцию `trapz(y)` с одним аргументом, то будет вычислена площадь фигуры под графиком функции $y(x)$ , в котором все точки заданы векторами `x` и `y`, причем по умолчанию элементы вектора `x` принимают значения номеров элементов вектора `y`.

ЗАДАЧА 8.10. Вычислить интеграл от функции $y(x)=\cos(x)$ . Значения функции представлены в табл. 8.1.

Таблица *8.1*. Значения функции $y(x)=\cos(x)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | -1.5708 | -1.0708 | -0.5708 | -0.0708 | 0.4292 | 0.9292 | 01.01.92 |
| *y* | 0 | 0.47943 | 0.84147 | 0.99749 | 0.90930 | 0.59847 | 0.14112 |

Решение задачи представлено в листинге 8.15.

```
>>> I=trapz(x, y)
```

```
I =  1.9484
>>> clear all;
x=[-1.5708 -1.0708 -0.5708 -0.0708 0.4292 0.9292 1.4292];
y=[0 0.47943 0.84147 0.99749 0.90930 0.59847 0.14112];
I=trapz(x, y)
>>>I =  1.9484
```

Листинг 8.15

ЗАДАЧА 8.11. Вычислить интеграл $I=\int_{2}^{5}\sqrt{2x-1}$ .

Листинг 8.16 содержит несколько вариантов решения данной задачи. В первом случае интервал интегрирования делится на отрезки с шагом 1, во втором 0.5, в третьем 0.1 и в четвертом 0.05. Не трудно заметить, что чем больше точек разбиения, тем точнее значение искомого интеграла. Решение можно сравнить с результатом полученным в задаче 8.9, где этот же интеграл был найден по формулам Ньютона-Лейбница (листинг 8.14).

```
>>> clear all;
%1. h=1
x=2:5;
y=sqrt(2*x-1);
I1=trapz(x, y)
%2. h=0.5
x=2:0.5:5;
y=sqrt(2*x-1);
I2=trapz(x, y)
%3. h=0.1
x=2:0.1:5;
y=sqrt(2*x-1);
I3=trapz(x, y)
%4. h=0.05
x=2:0.05:5;
y=sqrt(2*x-1);
I4=trapz(x, y)
%Результаты интегрирования
>>>I1 =  7.2478
>>>I2 =  7.2629
>>>I3 =  7.2677
>>>I4 =  7.2679
```

Листинг 8.16

В листинге 8.17 приведен пример использования функции `trapz` с одним аргументом. Как видим, в первом случае значение интеграла вычисленного при помощи этой функции не точно и совпадает со значением, полученным функцией `trapz(x, y)` на интервале $[2,5]$ с шагом 1 (листинг 8.16, первый пример). То есть мы нашли сумму площадей трех прямолинейных трапеций с основанием $h$=1 и боковыми сторонами, заданными вектором $y$. Во втором случае, при попытке увеличить точность интегрирования, значение интеграла существенно увеличивается. Дело в том что, уменьшив шаг разбиения интервала интегрирования до 0.05, мы увеличили количество элементов векторов $x$ и $y$ и применение функции `trapz(y)` приведет к вычислению суммы площадей шестидесяти трапеций с основанием $h$=1 и боковыми сторонами, заданными вектором $y$. Таким образом, в первом и втором примерах листинга 8.17 вычисляются площади совершенно разных фигур.

```
%1.
x=2:5;
y=sqrt(2*x-1);
I=trapz(y)
>>>I =  7.2478
%2.
x=2:0.05:5;
y=sqrt(2*x-1);
I=trapz(y)
>>>I =  145.36
```

Листинг 8.17

Функция `cumtrapz` выполняет так называемое «интегрирование с накоплением» по методу трапеций . Это означает, что она, так же как и `trapz`, вычисляет площадь фигуры под графиком функции $y(x)$ , но результатом ее работы является вектор, состоящий из промежуточных вычислений. То есть, если общая площадь $S$ криволинейной трапеции сформирована из суммы площадей $S_i(i=1,n)$ прямолинейных трапеций, то элементы вектора представляют собой следующую последовательность $S_1=0, S_2=S_1+S_2, S_3=S_1+S_2+S_3, ..., S_n=S_1+S_2+S_3+...+S_n$ . Таким образом, последний элемент вектора будет равен искомой площади фигуры $S$ . Функцию интегрирования с накоплением можно вызывать в форматах

`cumtrapz(x, y)` и `cumtrapz(y)`,

где `x` и `y` векторы, определяющие функцию $y(x)$ .

ЗАДАЧА 8.12. Вычислить интеграл $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+\sin(x)}$ .

Листинг 8.18 демонстрирует применение функции интегрирования с накоплением `cumtrapz` к поставленной задаче. Там же приведена интерпретация работы этой функции с помощью команды `trapz`.

```
>>> x=0:0.1:pi/2;
y=(5+sin(x)).^(-1);
%1. Интегрирование с накоплением
I1=cumtrapz(x,y)
>>>I1 =
 Columns 1 through 8:
0.0 0.0198 0.03923 0.05829 0.07701 0.09541 0.11352 0.13136
 Columns 9 through 16:
0.1489 0.1663 0.18356 0.2006 0.2175 0.23434 0.25108 0.2677
 %2. Обычное интегрирование
 I2=trapz(x,y)
%Значение I2 совпадает с последним значением вектора I1
>>>I2 =  0.26777
 %3. Ин
 x=0:0.1:1;
 y=(5+sin(x)).^(-1);
  I3=trapz(x,y)
%Значение I3 совпадает с 11-м значением вектора I1
>>>I3 =  0.18356
```

Листинг 8.18

### 8.3.2 Интегрирование по методу Симпсона

Изложим идею *интегрирования по методу Симпсона*. Пусть $n=2m$ – четное число, а $y_i=f(x_i)(i=0,n)$ – значения функции $y=f(x)$ для равноотстоящих точек $a=x_0, x_1, x_2, ..., x_n=b$ с шагом $h=\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{2m}$ . На паре соседних участков (рис. ) кривая $y=f(x)$ заменяется параболой $y=L(x)$ , коэффициенты которой подобраны так, что она проходит через точки $y_0, y_1, y_2$ .

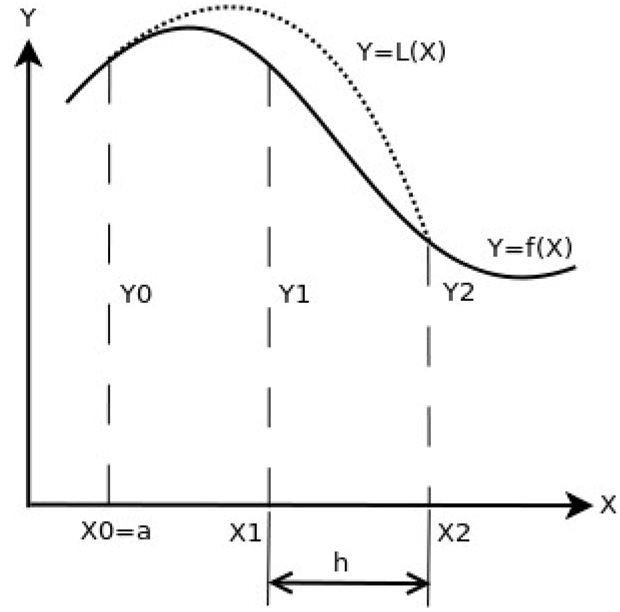


Рисунок *8.6*. Геометрическая интерпретация интегрирования по методу Симпсона

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой, составит:

$$S_i=\frac{h}{3}(y_{i-1}+4y_i+y_{i+1}) \quad .$$

Суммируя площади всех криволинейных трапеций, получим:

$$S=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+...+2y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m})=\frac{h}{3}\left(y_0+y_{2m}+\sum_{i=1}^{2m-1} p\,y_i\right)$$

где $p=6-p, p=4$ . Следовательно, *формула Симпсона для численного интегрирования* имеет вид:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+\sum_{i=1}^{2m-1} p\,y_i\right) \quad .$$

Методы трапеций и Симпсона являются частными случаями *квадратурных формул Ньютона–Котеса*, которые, вообще говоря, имеют вид

$$\int_a^b y\,dx=(b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i \quad ,$$

где $H_i$ – это некоторые константы называемые *постоянными Ньютона–Котеса*.

Если для квадратурных формул Ньютона-Котеса принять $n=1$ , то получим метод трапеций, а при $n=2$ – метод Симпсона. Поэтому эти методы называют *квадратурными методами низших порядков*. Для $n>2$ получают *квадратурные формулы Ньютона–Котеса высших порядков*.

В Octave реализован вычислительный *алгоритм метода Симпсона с автоматическим выбором шага*. Автоматический выбор шага интегрирования заключается в том, что интервал интегрирования разбивают на $n$ отрезков и вычисляют значение интеграла, если полученное значение не удовлетворяет заданной точности вычислений, то $n$ увеличивают вдвое и вновь вычисляют значение интеграла, так повторяют до тех пор пока не будет достигнута заданная точность. Итак, вычисление интеграла по методу Симпсона обеспечивает функция

```
[F, K]=quadv(name, a, b [, tol, trace]),
```

где:

`name` – имя функции, задающей подынтегральное выражение;

`a`, `b` – пределы интегрирования;

`tol` – точность вычислений;

`trace` – параметр позволяющий получить информацию о ходе вычислений в виде таблицы, в столбцах которой представлены: значение количества вычислений, начальная точка текущего промежутка интегрирования, его длина и значение интеграла;

`F` – значение интеграла;

`K` – количество итераций.

ЗАДАЧА 8.13. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ .

Решение задачи с применением функции `quadv` приведено в листинге 8.19.

```
%Подынтегральная функция
function y=G(x)
y=(4-x^2).^(1/2);
end;
%Вычисление интеграла по методу Симпсона
format long
%Точность установлена по умолчанию 1.0e-06
[F1,K1]=quadv('G',0,1)
%Результат - значение интеграла и количество итераций
>>>F1 =  1.91322288999134
K1 =  17
%Точность установлена пользователем 1.0e-07
[F2,K2]=quadv('G',0,1,1.0e-07)
%Результат - значение интеграла и количество итераций
>>>F2 =  1.91322295090669
K2 =  33
format short
%Вызов функций с заданной степенью точности
%Вывод дополнительной информации о вычислениях
quadv('G',0,1,1.0e-05,5)
>>>5.00000   0.00000   1.00000   1.91321
   7.00000   0.00000   0.50000   0.98948
   9.00000   0.50000   0.50000   0.92374
   11.0000   0.50000   0.25000   0.47458
   13.0000   0.75000   0.25000   0.44916
ans =  1.9132
```

Листинг 8.19

### 8.3.3 Интегрирование по квадратурным формулам Гаусса

Запишем в общем виде квадратурную формулу для функции заданной на промежутке [–1; 1]

$$\int_{-1}^{1} y\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot f(x_i) \quad .$$

Попытаемся найти коэффициенты $A_i$ и узловые точки $t_i$, таким образом, чтобы квадратурная формула была точной для всех полиномов $f(t)=1, t, t^2, \ldots, t^{2n-1}$.

В этом случае построение квадратурной формулы приводит к определению $A_i$ и $t_i$ из нелинейной системы $2n$ уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 2, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot t_i = 0, \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1}, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot t_i^{2n-1} = 0. \end{cases}$$

Решение нелинейной системы задача не тривиальная, но ее можно обойти, если знать, что значениями $t_i$ квадратурной формулы служат корни многочлена Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^2), (n=0,1,2,\ldots).$$

Как известно, корни полинома Лежандра существуют при любом *n*, различны и принадлежат интервалу [–1; 1].

Итак, *квадратурной формулой Гаусса* называют выражение

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t_i\right) \quad ,$$

где $t_i$ – корни полинома Лежандра, а $A_i$ определяется интегрированием базисных многочленов Лежандра $P_i(t)$ степени $n-1$ :

$$A_i = \int_{-1}^{1} \frac{(t-t_1)\ldots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\ldots(t-t_n)}{(t_i-t_1)\ldots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\ldots(t_i-t_n)} dt \quad .$$

В Octave *интегрирование по квадратуре Гаусса* выполняет функция

```
[F, kod, K, err] = quad(name, a, b, tol, sing),
```

где

`name` – имя функции, задающей подынтегральное выражение;

`a`, `b` – пределы интегрирования;

`tol` – точность вычислений;

`sing` – вектор значений, близких к тем, в которых подынтегральная функция терпит разрыв;

`F` – значение интеграла;

`kod` – код ошибки в решении (0 — решение завершено успешно);

`K` – количество итераций;

`err` – погрешность вычислений.

ЗАДАЧА 8.14. Вычислить интеграл $\int_{0}^{1} t^2 \cdot \sqrt{(3+\sin(\frac{1}{t}))}\,dt$ .

Обратите внимание, что в нижней границе интегрирования подынтегральная функция терпит разрыв. Решение задачи с применением функции `quad` приведено в листинге 8.20.

```
clear all;
function y=f(x)
y=(x.^2).*sqrt(3+sin(1./x));
end;
format long
[F,kod , K, err]=quad('f',0,1)
>>>F =  0.654343719149802
kod = 0
K =  1323
err =  1.37557012147481e-08
[F,kod , K, err]=quad('f',0,1,1.0e-05)
>>>F =  0.654343738854992
kod = 0
K =  315
err =  3.82733563379833e-06
[F,kod , K, err]=quad('f',0,1,1.0e-20)
>>>F =  0.654343718970708
kod = 0
K =  1491
err =  9.39557628735834e-09
[F,kod , K, err]=quad('f',0,1,1.0e-20,0.1)
>>>F =  0.654343710193938
kod = 0
K =  840
err =  5.80259740257105e-09
[F,kod , K, err]=quad('f',0,1,1.0e-20,0.001)
>>>F =  0.654343718720156
kod = 0
K =  1596
err =  8.35248716562893e-09
```

Листинг 8.20

Функции

```
F = quadl(f, a, b [, tol, trace]),
[F,err] = quadgk(f, a, b [, tol, trace])
```

где

`name` – имя функции, задающей подынтегральное выражение;

`a`, `b` – пределы интегрирования;

`tol` – точность вычислений;

`trace` – таблица промежуточных вычислений;

`F` – значение интеграла;

`err` – погрешность вычислений;

также выполняют *интегрирование по квадратуре Гаусса.* В этих функциях специальным образом подбирается шаг. В первом случае по методу Гаусса-Лобатто, во втором Гауса-Конрада.

ЗАДАЧА 8.15. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tg^4(x)\,dx$ .

Решение задачи с применением функции `quadl` и `quadgk` приведено в листинге 8.21.

```
function y=f(x)
y = tan(x).^4;
end;
format long
[F]=quadl('f',-pi/3,pi/3,1.0e-05)
>>>F =  2.09439512983937
[F,err]=quadgk('f',-pi/3,pi/3,1.0e-05)
>>>F =  2.09439510239319
err =  1.02555919485880e-12
```

Листинг 8.21