6. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Рассмотрим возможности Octave при решении задач векторной алгебры и аналитической геометрии. Благодаря мощным графическим средствам пакета эти задачи становятся более понятными и наглядными.

6.1 Векторная алгебра

В геометрии *вектором* называется всякий направленный отрезок. Учение о действиях над векторами называется *векторной алгеброй*.

Вектор, началом которого служит точка **A**, а концом точка **B**, обозначается $\vec{AB}$ или $\vec{a}$. Если начало и конец вектора совпадают, то отрезок превращается в точку и теряет направление, такой отрезок называют *нуль-вектором*. Если вектор задан точками $A(x_{1,} y_1)$ и $B(x_{2,} y_2)$, то его *координаты*: $|\vec{AB}|=\{(x_2-x_1),(y_2-y_1)\}=\{X, Y\}$. Длина вектора называется также его *модулем* , обозначается $|\vec{AB}|$ или $|\vec{a}|$ и вычисляется по формуле: $\vec{a}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$. Формулы $M_x=\frac{x_1+x_2}{2}, M_y=\frac{y_1+y_2}{2}$ служат для вычисления координат *середины отрезка* $\vec{AB}$. *Разделить отрезок* $\vec{AB}$ в заданном отношении λ можно так: $L_x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, L_y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, здесь L_x и L_y - координаты точки **L**, делящей отрезок в отношении $AL:LB=l_1:l_2=\lambda$.

Напомним, что векторы в Octave задаются путем поэлементного ввода:

```
>>>%Вектор-строка
>>> a=[1 0 3]
a =
1 0 3
>>>%Вектор-столбец
>>> b=[0;1;4]
b =
0
1
4
```

Листинг 6.1

ЗАДАЧА 6.1. Построить вектор $|\vec{a}|=\{5,7\}$.

Решение задачи показано на рис. 6.1. Листинге 6.2. содержит команды Octave, с помощью которых был выполнен рисунок.

```
clear all;
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gcf,'numbertitle','off')
set(gcf,'name','Vector')
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'xlim',[0,10]);
set(gca,'ylim',[0,10]);
set(gca,'xtick',[0:10]);
set(gca,'ytick',[0:10]);
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
```

```
a=[5 7];
L1=line([0, a(1)],[0, a(2)]);
set(L1,'LineWidth',3,'Color','k');
L1_=line([a(1), a(1)],[a(2), a(2)]);
set(L1_,'LineWidth',5,'Color','k');
set(L1_,'marker','<','markersize',16);
```

Листинг 6.2

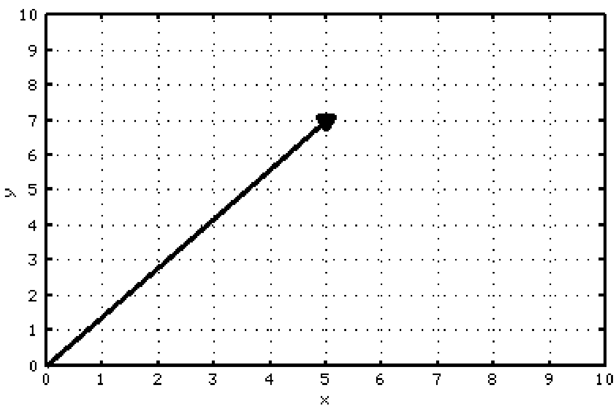

Рисунок *6.1*. Вектор на плоскости

ЗАДАЧА 6.2. Построить векторы, заданные координатами начала и конца:

$\vec{a}=\{(2,3),(4,6)\},\vec{b}=\{(9,7),(6,5)\},$

$\vec{c}=\{(1,8),(4,8)\},\vec{d}=\{(6,7),(6,9)\},$

$\vec{k}=\{(8,4),(8,1)\},\vec{p}=\{(7,3),(5,3)\}.$

Решение задачи показано в листинге 6.3 и на рис. 6.2. Обратите внимание, что для изображения вектора была создана специальная функция `vector(A,B)` . Эта функция изображает направленный отрезок $|\overrightarrow{AB}|$ в декартовой системе координат и возвращает координаты его середины. В данном случае координаты середины отрезка нужны для нанесения соответствующей надписи, обозначающей вектор на рисунке.

```
clear all;
%Функция рисует направленный отрезок AB,
%в качестве результата выдает координаты
%середины отрезка AB.
function [M]=vector(A,B)
x1=A(1);x2=B(1); y1=A(2);y2=B(2);
%Угол в вершине стрелки в радианах
alf=30*pi/180;
%Деление отрезка в заданном отношении
L=15;
xm=(x1+L*x2)/(1+L); ym=(y1+L*y2)/(1+L);
%Угол наклона прямой AB
k1=(y2-y1)/(x2-x1);
if (k1==Inf)|(k1==-inf)
%Отрезок перпендикулярен оси Ox
%Координаты основания треугольника, образующего стрелку
      x4=xm-0.2; y4=ym; x3=xm+0.2; y3=ym;
elseif k1==0
%Отрезок перпендикулярен  оси Oy
```

```
      x4=xm; y4=ym-0.2; x3=xm; y3=ym+0.2;
else
%Уравнение прямой AB
      k1=(y2-y1)/(x2-x1); m1=y1-x1*(y2-y1)/(x2-x1);
%Уравнение прямой перпендикулярной AB
      k3=-1/k1; m3=1/k1*xm+ym;
%Уравнение прямой, проходящей через точку B
%под углом alf к прямой AB
      k2=(-k1-tan(alf))/(tan(alf)*k1-1); m2=y2-k2*x2;
%Уравнение прямой, проходящей через точку B
%под углом -alf к прямой AB
      k4=(-k1-tan(-alf))/(tan(-alf)*k1-1); m4=y2-k4*x2;
%Координаты основания треугольника, образующего стрелку
      x4=(m3-m2)/(k2-k3); y4=k2*x4+m2;
      x3=(m3-m4)/(k4-k3); y3=k3*x3+m3;
end;
```

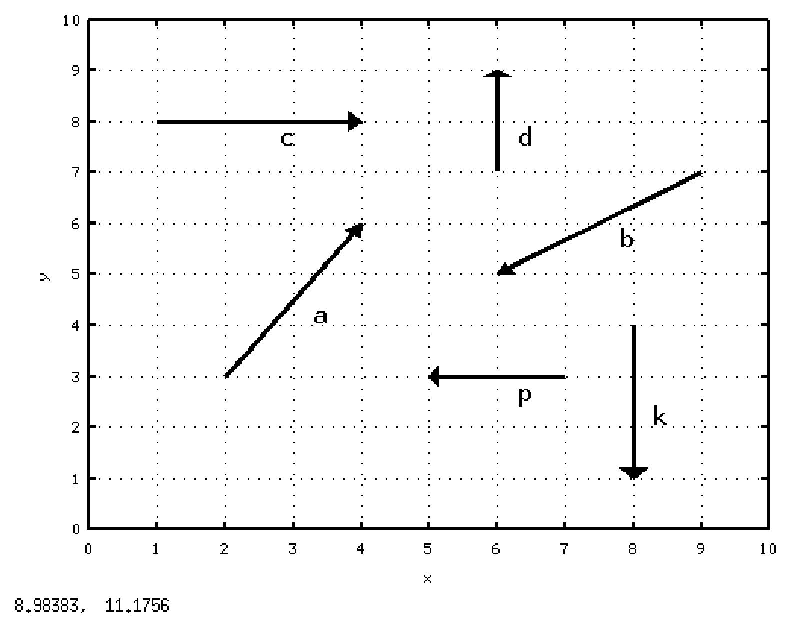

Рисунок *6.2*. Геометрическое решение задачи *6.2*

```
%Изображение прямой AB
line([A(1),B(1)],[A(2),B(2)],'LineWidth',3,'Color','k');
%Изображение стрелки в точке B
patch([x2,x3,x4],[y2,y3,y4],'k');
%Координаты середины отрезка AB
M(1)=(x1+x2)/2; M(2)=(y1+y2)/2;
end;
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gcf,'numbertitle','off'); set(gcf,'name','Vector');
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'xlim',[0,10]); set(gca,'ylim',[0,10]);
set(gca,'xtick',[0:10]); set(gca,'ytick',[0:10]);
grid on;
```

```
xlabel('x');ylabel('y');
%Построение вектора  a
ma=vector([2,3],[4,6]);
T=text(ma(1)+0.3,ma(2)-0.3,'a');
set(T,'FontSize',20)
%Построение вектора  b
mb=vector([9,7],[6,5]);
T=text(mb(1)+0.3,mb(2)-0.3,'b');
set(T,'FontSize',20)
%Построение вектора  c
mc=vector([1,8],[4,8]);
T=text(mc(1)+0.3,mc(2)-0.3,'c');
set(T,'FontSize',20)
%Построение вектора  d
md=vector([6,7],[6,9]);
T=text(md(1)+0.3,md(2)-0.3,'d');
set(T,'FontSize',20)
%Построение вектора  k
mk=vector([8,4],[8,1]);
T=text(mk(1)+0.3,mk(2)-0.3,'k');
set(T,'FontSize',20)
%Построение вектора  p
mp=vector([7,3],[5,3]);
T=text(mp(1)+0.3,mp(2)-0.3,'p');
set(T,'FontSize',20)
```

Листинг 6.3

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *равны*, если они равнонаправлены и имеют один и тот же модуль. Все нулевые векторы равны. Во всех остальных случаях векторы *не равны*. Два вектора имеющие равные модули и противоположные направления,называются *противоположными*. Векторы лежащие на параллельных прямых называются *коллинеарными*.

Задача 6.3. Сравнить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PR}$ и $\overrightarrow{UV}$ заданные координатами начала и конца:

$A(1,2), B(3,5), C(3,2), D(5,5), \quad O(7,9), M(6,6), N(8,6), K(4,9), L(3,6),$
$P(9,2), R(6,2), U(6,3), V(9,3).$

Текст файла-сценария представлен в листинге 6.4. При решении задачи была создана функция `dlina(X,Y)`, которая вычисляет длину отрезка **XY**, заданного координатами точек $X(x_1, x_2)$ и $Y(y_1, y_2)$. Для изображения векторов использовалась функция `vector(A,B)`, описанная в задаче 6.2.

Решение задачи показано в листинге 6.5 и на рис. 6.3. По полученным числовым результатам и геометрической интерпретации задачи можно сделать вывод, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны. Векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ не равны, хотя у них и одинаковые длины, но направления различны. Векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{KL}$ неравны по той же причине, а векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{KL}$ равны. Векторы $\overrightarrow{PR}$ и $\overrightarrow{UV}$ - противоположные, так как имеют одинаковый модуль и противоположные направления.

```
%Функция возвращает длину отрезка XY
function d=dlina(X,Y)
d=sqrt((Y(1)-X(1))^2+(Y(2)-X(2))^2);
end;
clf;
```

```
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gcf,'numbertitle','off')
set(gcf,'name','Vector')
cla;
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'xlim',[0,10]);
set(gca,'ylim',[0,10]);
set(gca,'xtick',[0:10]);
set(gca,'ytick',[0:10]);
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
%Исходные данные
A=[1,2];B=[3,5];C=[3,2];D=[5,5];
O=[7,9];M=[6,6];N=[8,6];
K=[4,9]; L=[3,6];
P=[9,2];R=[6,2];
U=[6,3];V=[9,3];
%Длины отрезков
dAB=dlina(A,B)
dCD=dlina(C,D)
dON=dlina(O,N)
dOM=dlina(O,M)
dKL=dlina(K,L)
dPR=dlina(P,R)
dUV=dlina(U,V)
%Построение вектора  AB
vector(A,B);
A_=text(A(1)+0.3,A(2)-0.3,'A');
B_=text(B(1)+0.3,B(2)-0.3,'B');
set(A_,'FontSize',20)
set(B_,'FontSize',20)
%Построение вектора  CD
vector(C,D);
C_=text(C(1)+0.3,C(2)-0.3,'C');
D_=text(D(1)+0.3,D(2)-0.3,'D');
set(C_,'FontSize',20)
set(D_,'FontSize',20)
%Построение вектора  OM
vector(O,M);
O_=text(O(1)+0.3,O(2)-0.3,'O');
M_=text(M(1)+0.3,M(2)-0.3,'M');
set(O_,'FontSize',20)
set(M_,'FontSize',20)
%Построение вектора  ON
vector(O,N);
%O_=text(O(1)+0.3,O(2)-0.3,'O');
N_=text(N(1)+0.3,N(2)-0.3,'N');
%set(O_,'FontSize',20)
set(N_,'FontSize',20)
%Построение вектора  KL
vector(K,L);
```

```
K_=text(K(1)+0.3,K(2)-0.3,'K');
L_=text(L(1)+0.3,L(2)-0.3,'L');
set(K_,'FontSize',20)
set(L_,'FontSize',20)
%Построение вектора  PR
vector(P,R);
P_=text(P(1)+0.3,P(2)-0.3,'P');
R_=text(R(1)+0.3,R(2)-0.3,'R');
set(P_,'FontSize',20)
set(R_,'FontSize',20)
%Построение вектора  UV
vector(U,V);
U_=text(U(1)+0.3,U(2)-0.3,'U');
V_=text(V(1)+0.3,V(2)-0.3,'V');
set(U_,'FontSize',20)
set(V_,'FontSize',20)
```

Листинг 6.4

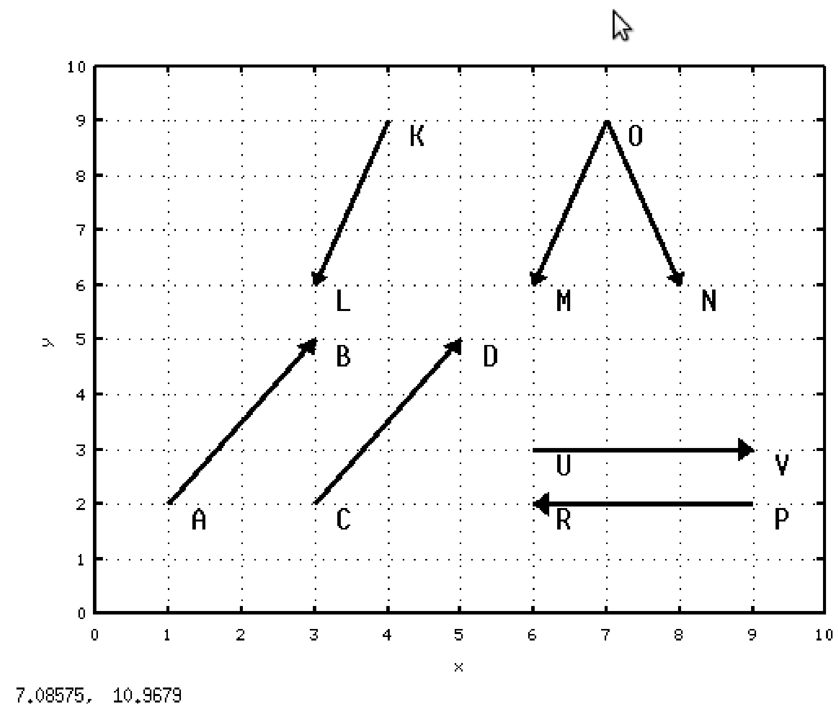

Рисунок *6.3*. Геометрическое решение задачи *6.3*

```
>>>%Длины отрезков:
>>>AB =  3.6056
>>>CD =  3.6056
>>>ON =  3.1623
>>>OM =  3.1623
>>>KL =  3.1623
>>>PR =  3
>>>UV =  3
```

Листинг 6.5

ЗАДАЧА 6.4. Проверить коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{NM}$ и

$\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PR}$ и $\overrightarrow{UV}$. Координаты точек:

$A(4,2), B(2,3), C(3,2), D(7,0), \quad M(2,1), N(6,1), K(1,2), L(7,2),$
$P(3,3), R(5,3), U(1,4), V(5,4).$

Текст файла-сценария представлен в листинге . При решении задачи была создана функция `kollin(a,b)`, которая определяет коллинеарны ли векторы $\vec{a}=\{x_{1,}y_1\}$ и $\vec{b}=\{x_{2,}y_2\}$. Результатом работы функции является *коэффициент пропорциональности векторов*. Если векторы коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны: $\pm\lambda=\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}$. Знак коэффициента пропорциональности говорит о направлении векторов: «+» - в одну сторону, «-» - в разные. Для изображения векторов использовалась функция `vector(A,B)`, описанная в задаче 6.2.

Решение задачи показано в листинге 6.6 и на рис. 6.4. По полученным числовым результатам и геометрической интерпретации задачи можно сделать вывод, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, но направлены в разные стороны. Векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{KL}$ не являются коллинеарными. Векторы $\overrightarrow{PR}$ и $\overrightarrow{UV}$ - коллинеарны и имеют одно направление.

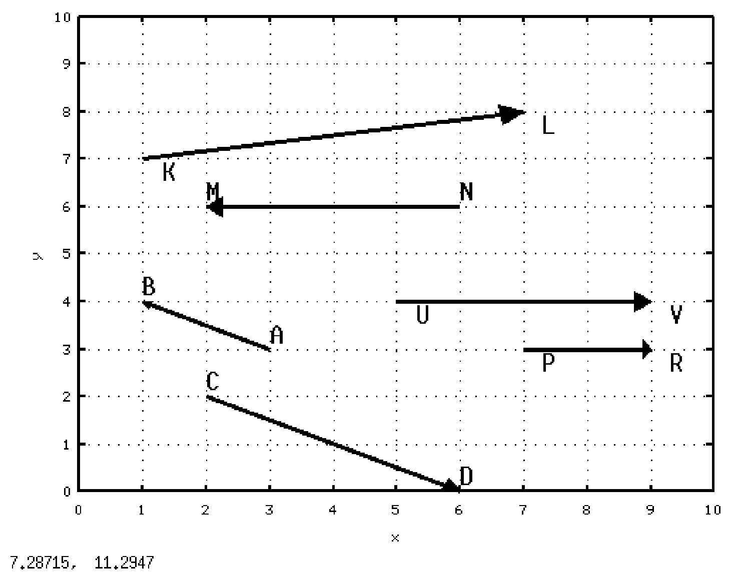

Рисунок *6.4*. Геометрическая интерпретация задачи *6.4*

```
function [lam]=kollin(a,b)
if (a(2)==0) & (b(2)==0)
      lam=a(1)/b(1);
elseif (a(1)==0) & (b(1)==0)
      lam=a(2)/b(2);
elseif a(1)/b(1)==a(2)/b(2)
      lam=a(1)/b(1);
else
      lam=Inf;
end;
end;
clf;cla;
```

```
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gcf,'numbertitle','off')
set(gcf,'name','Vector')
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'xlim',[0,10]);
set(gca,'ylim',[0,10]);
set(gca,'xtick',[0:10]);
set(gca,'ytick',[0:10]);
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
A=[3,3];B=[1,4];C=[2,2];D=[6,0];
M=[2,6];N=[6,6];
K=[1,7]; L=[7,8];
P=[7,3];R=[9,3];
U=[5,4];V=[9,4];
AB_CD=kollin(B-A,D-C)
MN_KL=kollin(N-M,L-K)
PR_UV=kollin(R-P,V-U)
%Построение вектора AB
vector(A,B);
A_=text(A(1),A(2)+0.3,'A');
B_=text(B(1),B(2)+0.3,'B');
set(A_,'FontSize',20)
set(B_,'FontSize',20)
%Построение вектора  CD
vector(C,D);
C_=text(C(1),C(2)+0.3,'C');
D_=text(D(1),D(2)+0.3,'D');
set(C_,'FontSize',20)
set(D_,'FontSize',20)
%Построение вектора  NM
vector(N,M);
N_=text(N(1),N(2)+0.3,'N');
M_=text(M(1),M(2)+0.3,'M');
set(N_,'FontSize',20)
set(M_,'FontSize',20)
%Построение вектора  KL
vector(K,L);
K_=text(K(1)+0.3,K(2)-0.3,'K');
L_=text(L(1)+0.3,L(2)-0.3,'L');
set(K_,'FontSize',20)
set(L_,'FontSize',20)
%Построение вектора  PR
vector(P,R);
P_=text(P(1)+0.3,P(2)-0.3,'P');
R_=text(R(1)+0.3,R(2)-0.3,'R');
set(P_,'FontSize',20)
set(R_,'FontSize',20)
%Построение вектора  UV
vector(U,V);
U_=text(U(1)+0.3,U(2)-0.3,'U');
```

```
V_=text(V(1)+0.3,V(2)-0.3,'V');
set(U_,'FontSize',20)
set(V_,'FontSize',20)
%Результаты работы программы
%Коэффициенты пропорциональности векторов
>>>AB_CD = -0.50000
>>>MN_KL = Inf
>>>PR_UV =  0.50000
```

Листинг 6.6

Геометрической проекций вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось **OX** называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$, начало которого A' есть проекция точки *A* на ось **OX**, а конец B' - проекция точки *B* на ту же ось. Обозначается: $\overrightarrow{A'B'}=Пр_{OX}\overrightarrow{AB}$. *Алгебраической проекций вектора* $\overrightarrow{AB}$ на ось **OX** называется длина вектора $\overrightarrow{A'B'}$, взятая со знаком «+», если направление вектора $\overrightarrow{AB}$ совпадает с направлением оси **OX**, или со знаком «-» в противном случае.

Задача 6.5. Найти проекции векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{PR}$ на ось **OX.** Координаты точек, задающих векторы: $A(1,2), B(3,5)$, $P(9,2), R(6,2)$

Текст файла-сценария представлен в листинге 6.7. При решении задачи была создана функция `pr_OX(X)`, которая вычисляет длину проекции вектора на ось **OX.** Аргументом функции является массив абсцисс $X(x_1, x_2)$ заданного вектора. Для изображения векторов и их проекций использовалась функция `vector(A,B)`, описанная в задаче 6.2. Значения алгебраических проекции векторов представлены в листинге 6.8. Геометрические проекции показаны на рис. 6.5.

```
%Длина проекции вектора на ось OX
function pr=pr_OX(X)
pr=X(2)-X(1);
end;
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gcf,'numbertitle','off')
set(gcf,'name','Vector')
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'xlim',[0,10]);
set(gca,'ylim',[0,10]);
set(gca,'xtick',[0:10]);
set(gca,'ytick',[0:10]);
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
A=[1,2];B=[3,5];
P=[9,2];R=[6,2];
%Длины проекций
prAB=pr_OX([A(1),B(1)])
prPR=pr_OX([P(1),R(1)])
%Построение вектора  AB
vector(A,B);
A_=text(A(1)+0.3,A(2)-0.3,'A');
B_=text(B(1)+0.3,B(2)-0.3,'B');
set(A_,'FontSize',20)
set(B_,'FontSize',20)
```

```
%Построение проекции вектора AB на ось OX
mAB=vector([A(1),0],[B(1),0]);
text(mAB(1),mAB(2)+0.5,'prAB','FontSize',18);
%Построение вектора PR
vector(P,R);
P_=text(P(1)+0.3,P(2)-0.3,'P');
R_=text(R(1)+0.3,R(2)-0.3,'R');
set(P_,'FontSize',20)
set(R_,'FontSize',20)
%Построение проекции вектора PR на ось OX
mPR=vector([P(1),0],[R(1),0]);
text(mPR(1),mPR(2)+0.3,'prPR','FontSize',18);
```

Листинг 6.7

```
>>>prAB =  2
>>>prPR = -3
```

Листинг 6.8

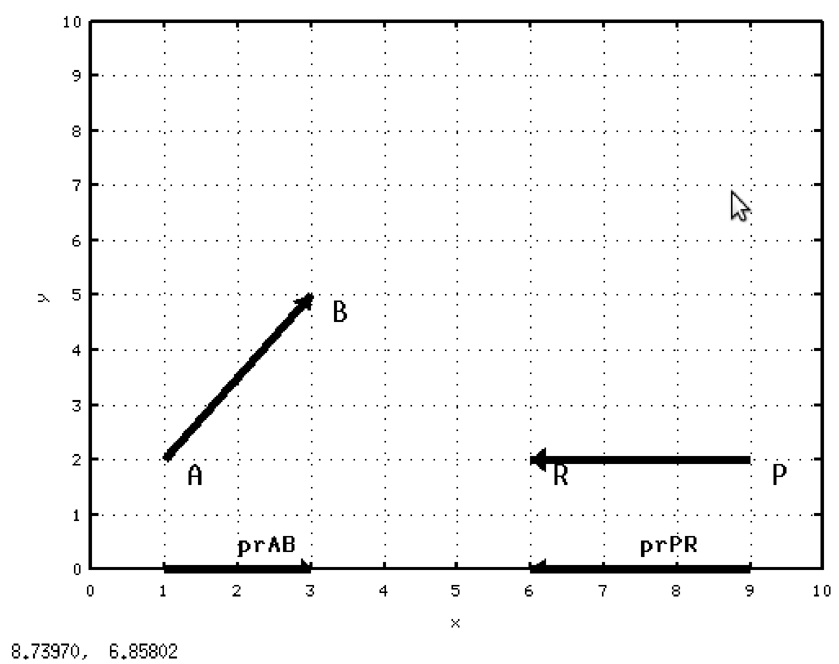

Рисунок 6.5. Проекции векторов на ось OX

Всякие векторы можно *привести к общему началу*, то есть построить векторы равные данным и имеющие общее начало в некоторой точке **O**. Над векторами производят различные *действия:* сложение, вычитание, умножение. При *сложении* (*вычитании*) векторов их координаты складываются (вычитаются): $\vec{a}\pm\vec{b}=\{(a_1\pm b_1),(a_2\pm b_2)\}$. При *умножении* (*делении*) вектора на число все координаты умножаются (делятся) на это число: $\lambda\vec{a}=\{\lambda a_1,\lambda a_2\}$, $\frac{\vec{a}}{\lambda}=\{\frac{a_1}{\lambda},\frac{a_2}{\lambda}\}$.

ЗАДАЧА 6.6. Найти сумму векторов $|\vec{a}|=\{1,4\}$ и $|\vec{b}|=\{5,3\}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то геометрически вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ является диагональю параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (*правило параллелограмма*).

Листинг 6.9. содержит команды Octave, с помощью которых была решена задача и результаты ее работы. Функция `vector(A,B)`, описана в задаче 6.2. Геометрическое решение задачи показано на рис. 6.6.

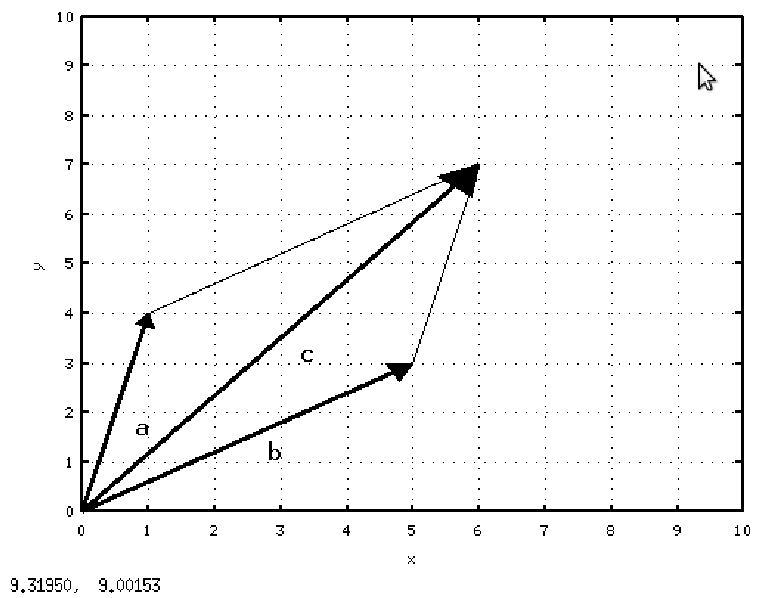

Рисунок *6.6*. Геометрическое представление суммы векторов

```
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gcf,'numbertitle','off')
set(gcf,'name','Vector c=a+b')
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'xlim',[0,10]);
set(gca,'ylim',[0,10]);
set(gca,'xtick',[0:10]);
set(gca,'ytick',[0:10]);
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
a=[1,4];b=[5,3];
%Сумма векторов
c=[a(1)+b(1),a(2)+b(2)]
%Построение вектора  a
ma=vector([0,0],a);
text(ma(1)+0.3,ma(2)-0.3,'a','FontSize',20);
%Построение вектора  b
mb=vector([0,0],b);
text(mb(1)+0.3,mb(2)-0.3,'b','FontSize',20);
%Построение вектора  c=a+b
mc=vector([0,0],c);
text(mc(1)+0.3,mc(2)-0.3,'c','FontSize',20);
line([a(1),c(1)],[a(2),c(2)],'LineWidth',1,'Color','k');
line([b(1),c(1)],[b(2),c(2)],'LineWidth',1,'Color','k');
%Результаты работы программы. Координаты вектора c=a+b:
>>>c =   6   7
```
Листинг 6.9

ЗАДАЧА 6.7. Выполнить действия над векторами $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$, где $|\vec{a}|=\{1,2\}$ и $|\vec{b}|=\{3,1\}$. Геометрически вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, значит найти такой вектор $\vec{x}$ для которого $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$. Иначе говоря, если на векторах $\vec{x}$ и $\vec{b}$ построить треугольник, то $\vec{a}$ - его третья сторона (*правило треугольника*).

Листинг 6.10. содержит команды Octave и результаты работы файла-сценария. Функция `vector(A,B)`, описана в задаче 6.2. Решение задачи показано на рис. 6.7.

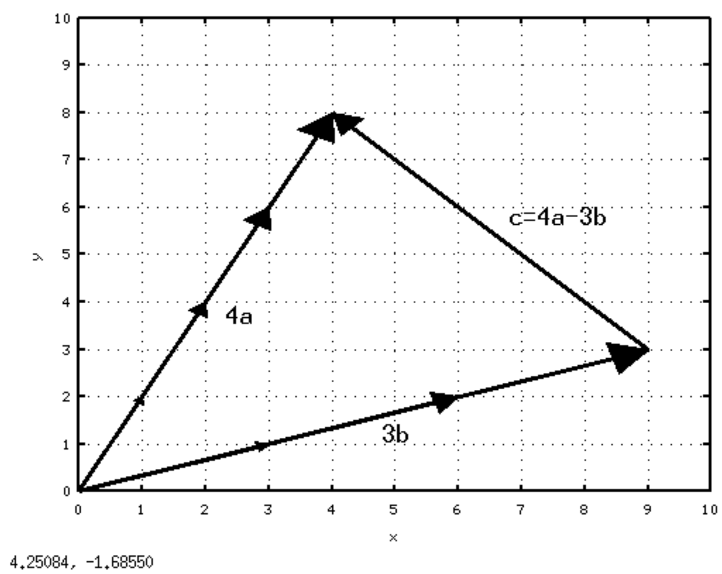

Рисунок 6.7. Геометрическое представление действий над векторами

```
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gcf,'numbertitle','off')
set(gcf,'name','Vector c=4a-3b')
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'xlim',[0,10]);
set(gca,'ylim',[0,10]);
set(gca,'xtick',[0:10]);
set(gca,'ytick',[0:10]);
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
a=[1,2];b=[3,1];
%Действия над векторами
c=[4*a(1)-3*b(1),4*a(2)-3*b(2)]
%Построение вектора 4a
for i=1:4
ma=vector([0,0],i*a);
end;
text(ma(1)+0.3,ma(2)-0.3,'4a','FontSize',20);
%Построение вектора 3 b
for i=1:3
mb=vector([0,0],i*b);
end;
text(mb(1)+0.3,mb(2)-0.3,'3b','FontSize',20);
```

```
%Построение вектора  c=4a-3b
mc=vector([3*b(1),3*b(2)],[4*a(1),4*a(2)]);
text(mc(1)+0.3,mc(2)+0.3,'c=4a-3b','FontSize',20);
%Результаты работы программы
%Координаты отрезка c=4a-3b
>>>c =  -5   5
```

Листинг 6.10

ЗАДАЧА 6.8. Найти углы образуемые осями координат с вектором $|\vec{a}|=\{2,-2,-1\}$. Углы образуемые положительными направлениями осей с вектором $|\vec{a}|$ можно рассчитать по формулам: $\cos(\alpha)=\frac{a_1}{|a|}$, $\cos(\beta)=\frac{a_2}{|a|}$, $\cos(\gamma)=\frac{a_3}{|a|}$.

Листинг 6.11 содержит команды Octave и результаты работы файла-сценария.

```
%Углы, образуемые осями координат с вектором X
function [U]=ugol(X)
m=sqrt(X(1)^2+X(2)^2+X(3)^2);
U=acos(X/m);
end;
%Перевод радиан в градусы и минуты
function gr=rad_gr(rad)
gr(1)=round(rad*180/pi); %Градусы
gr(2)=round((rad*180/pi-gr(1))*60); %Минуты
end;
%Вычисление углов в радианах
u=ugol([2,-2,-1])
%Углы в градусах и минутах
alf=rad_gr(u(1))
bet=rad_gr(u(2))
gam=rad_gr(u(3))
%Результаты работы
%Углы в радианах
>>>u =
   0.84107   2.30052   1.91063
%Углы в градусах и минутах
>>>alf =
   48   11
>>>bet =
   132   -11
>>>gam =
   109    28
```

Листинг 6.11

Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними: $\overrightarrow{ab}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{a,b})$. Если $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, то $\overrightarrow{ab}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

ЗАДАЧА 6.9. Найти *угол между векторами* $\vec{a}=\{-2,1,2\}$ и $\vec{b}=\{-2,-2,1\}$:

$$\cos(\widehat{a,b})=\frac{\overrightarrow{ab}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\ .$$

Текст файла-сценария и результат его работы представлены в листинге 6.12.

```
%Перевод радиан в градусы и минуты
function gr=rad_gr(rad)
gr(1)=round(rad*180/pi); %Градусы
```

```
gr(2)=round((rad*180/pi-gr(1))*60); %Минуты
end;
a=[-2,1,2];b=[-2,-2,1];
da=sqrt(a(1)^2+a(2)^2+a(3)^2);
db=sqrt(b(1)^2+b(2)^2+b(3)^2);
ab=sum(a.*b);
alf=acos(ab/(da*db))
rad_gr(alf)
>>>%Результат
>>>%Угол в радианах
>>>alf =  1.1102
>>>%Угол в градусах
>>>ans =
   64  -23
```

Листинг 6.12

ЗАДАЧА 6.10. Проверить являются ли векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PR}$ и $\overrightarrow{UV}$ взаимно перпендикулярными. Координаты точек:

$M(2,1), N(6,1), K(1,2), L(7,2), \quad P(3,3), R(5,3), U(1,4), V(5,4).$

Если $\vec{a}=\{a_1, a_2\}$ и $\vec{b}=\{b_1, b_2\}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{ab}=a_1 b_1+a_2 b_2=0$. На рис. 6.8 Видно, что векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{KL}$ перпендикулярны, а $\overrightarrow{PR}$ и $\overrightarrow{UV}$ нет. Аналитические вычисления подтверждают это (листинг 6.13).

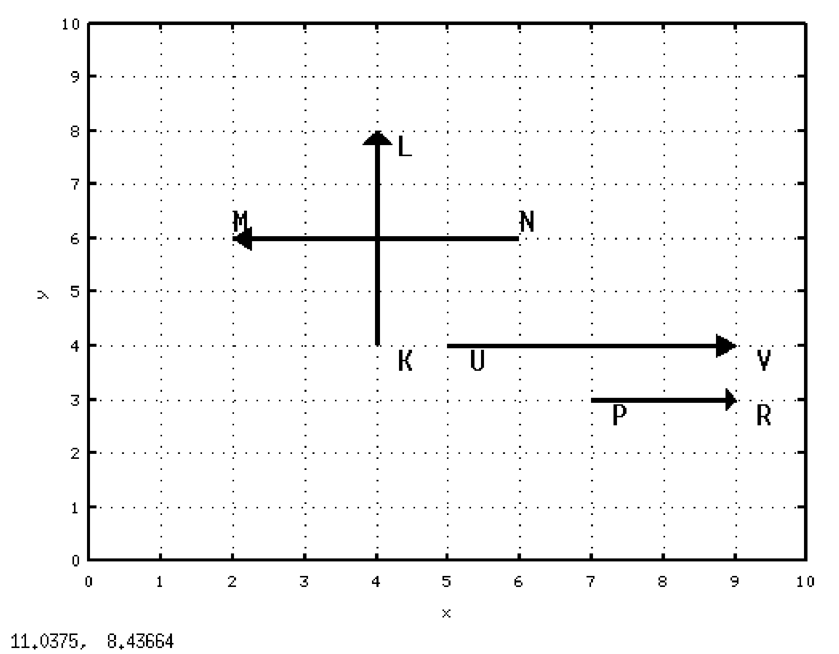

Рисунок *6.8*. Графическое решение задачи *6.10*

```
%Вычисление скалярного произведения векторов a и b
function [ab]=scal(a,b)
ab=a(1)*b(1)+a(2)*b(2);
end;
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gcf,'numbertitle','off')
```

```
set(gcf,'name','Vector')
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'xlim',[0,10]);
set(gca,'ylim',[0,10]);
set(gca,'xtick',[0:10]);
set(gca,'ytick',[0:10]);
grid on;
xlabel('x');ylabel('y');
M=[2,6];N=[6,6];
K=[4,4]; L=[4,8];
P=[7,3];R=[9,3];
U=[5,4];V=[9,4];
MN_KL=scal(N-M,L-K)
PR_UV=scal(R-P,V-U)
%Построение вектора NM
vector(N,M);
N_=text(N(1),N(2)+0.3,'N');
M_=text(M(1),M(2)+0.3,'M');
set(N_,'FontSize',20)
set(M_,'FontSize',20)
%Построение вектора KL
vector(K,L);
K_=text(K(1)+0.3,K(2)-0.3,'K');
L_=text(L(1)+0.3,L(2)-0.3,'L');
set(K_,'FontSize',20)
set(L_,'FontSize',20)
%Построение вектора PR
vector(P,R);
P_=text(P(1)+0.3,P(2)-0.3,'P');
R_=text(R(1)+0.3,R(2)-0.3,'R');
set(P_,'FontSize',20)
set(R_,'FontSize',20)
%Построение вектора UV
vector(U,V);
U_=text(U(1)+0.3,U(2)-0.3,'U');
V_=text(V(1)+0.3,V(2)-0.3,'V');
set(U_,'FontSize',20)
set(V_,'FontSize',20)
%Результат работы программы
>>>MN_KL = 0
>>>PR_UV =  8
```

Листинг 6.13

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на не коллинеарный с ним вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, модуль которого численно равен площади параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{a,b})$. Направление вектора $\vec{c}$ перпендикулярно плоскости параллелограмма. Если векторы $\vec{a}=\{x_{1,}y_{1,}z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_{1,}y_{2,}z_2\}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\} .$$

ЗАДАЧА 6.11. Найти векторное произведение векторов $|\vec{a}|=\{1,4\}$ и $|\vec{b}|=\{5,3\}$. Вычислить угол между векторами.

Графическое решение показано на рис. 6.9. Листинг содержит текст программы и результаты ее работы.

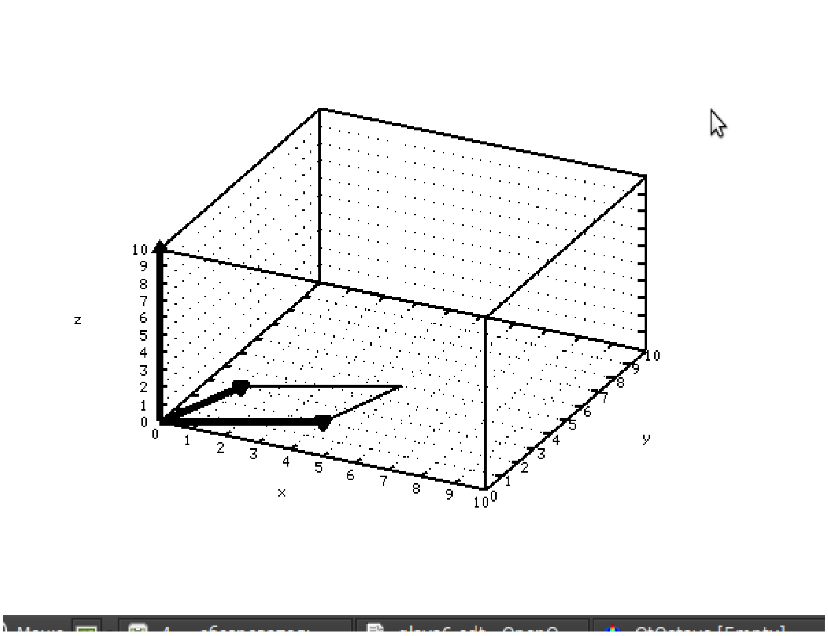

Рисунок 6.9. Геометрическая интерпретация векторного произведения

```
clear all;
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gcf,'numbertitle','off')
set(gcf,'name','Vector')
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'xlim',[0,10]);
set(gca,'ylim',[0,10]);
set(gca,'zlim',[0,10]);
set(gca,'xtick',[0:10]);
set(gca,'ytick',[0:10]);
set(gca,'ztick',[0:10]);
set(gca,'View',[30 30],'box','on');
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
axis([0,10,0,10,0,10])
grid on;
%Длина вектора
function D=dlin(x)
D=(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2)^(1/2);
end;
%Перевод радиан в градусы и минуты
function gr=rad_gr(rad)
gr(1)=round(rad*180/pi); %Градусы
gr(2)=round((rad*180/pi-gr(1))*60); %Минуты
end;
%Исходные данные
```

```
x1=4;y1=2;z1=0;x2=1;y2=3;z2=0;
a=[x1,y1,z1];b=[x2,y2,z2];
%Расчет координат векторного произведения
M=[a;b];
M1=M(1:2,2:3);M2=[M(:,1),M(:,3)];M3=M(1:2,1:2);
c(1)=det(M1);
c(2)=-det(M2);
c(3)=(det(M3));
%Расчет угла между векторами a  и b
da=dlin(a);
db=dlin(b);
dc=dlin(c);
alf=asin(dc/(da*db));
%Изображение векторов a,b,c
line([0,a(1)],[0,a(2)],[0,a(3)],
                           'LineWidth',5,'Color','k');
line([0,b(1)],[0,b(2)],[0,b(3)],
                           'LineWidth',5,'Color','k');
line([0,c(1)],[0,c(2)],[0,c(3)],
                           'LineWidth',5,'Color','k');
%Изображение стрелок на векторах
line([c(1),c(1)],[c(2),c(2)],[c(3),c(3)],
                    'LineWidth',5,'Color','k',
                         'marker','^','markersize',16);
line([b(1),b(1)],[b(2),b(2)],[b(3),b(3)],
                    'LineWidth',5,'Color','k',
                         'marker','<','markersize',10);
line([a(1),a(1)],[a(2),a(2)],[a(3),a(3)],
                    'LineWidth',5,'Color','k',
                         'marker','<','markersize',10);
%Расчет координат вершины параллелограмма
k1=y1/x1;k2=y2/x2;
d(1)=(y1-y2+k1*x2-k2*x1)/(k1-k2);
d(2)=k1*d(1)+y2-k1*x2;
d(3)=0;
%Стороны параллелограмма
line([a(1),d(1)],[a(2),d(2)],[a(3),d(3)],
                              'LineWidth',2,'Color','k');
line([b(1),d(1)],[b(2),d(2)],[b(3),d(3)],
                              'LineWidth',2,'Color','k');
%Координаты векторного произведения
c
%Угол между векторами a  и b
alfa=rad_gr(alf)
%Результаты работы программы
%Координаты векторного произведения
>>>c =
    0   -0   10
%Угол между векторами
>>>alfa =   45   -0
```

Листинг 6.14

Три вектора называют *компланарными*, если они, будучи приведены к общему началу, лежат в одной плоскости. *Смешанным* или *векторно-скалярным произведением* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение $\vec{b}\times\vec{c}$, то есть число $\overrightarrow{abc}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$. Если векторы $\vec{a}=\{x_{1,}y_{1,}z_1\}$, $\vec{b}=\{x_{1,}y_{2,}z_2\}$ и $\vec{c}=\{x_{3,}y_{3,}z_3\}$ даны своими координатами, то смешанное произведение вычисляют по формуле:

$$\overrightarrow{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Необходимым и достаточным *условием компланарности векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведение $\overrightarrow{abc}=0$.

ЗАДАЧА 6.12. Поверить компланарность векторов (листинг 6.15):

а) $\vec{a}=\{-2,-1,-3\}$, $\vec{b}=\{-1,4,6\}$ и $\vec{c}=\{1,5,9\}$;

б) $\vec{a}=\{1,2,3\}$, $\vec{b}=\{-1,3,4\}$ и $\vec{c}=\{2,5,2\}$

```
function d=komp(A,B,C)
M=[A;B;C];
d=det(M);
if d==0
 disp('Векторы компланарны');
else
 disp('Векторы не компланарны');
end;
end;
a=[-2,-1,-3];b=[-1,4,6];c=[1,5,9];
d1=komp(a,b,c)
a=[1,2,3];b=[-1,3,4];c=[2,5,2];
d2=komp(a,b,c)
%Результат работы программы
>>>Векторы компланарны
d1 = 0
>>>Векторы не компланарны
d2 = -27
```

Листинг 6.15

6.2 Аналитическая геометрия

Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_{0,}y_{0,}z_0)$ и перпендикулярная к вектору $\vec{N}\{A,B,C\}$ представляется *уравнением*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad \text{или} \quad Ax+By+Cz+D=0 .$$

Вектор $\vec{N}\{A,B,C\}$ называется *нормальным вектором* плоскости.

ЗАДАЧА 6.13. Записать уравнение и построить плоскость, проходящую через точку $M_0(2,0,4)$ и перпендикулярную вектору $\vec{N}\{3,0,-3\}$.

Исходя из условия задачи уравнение плоскости имеет вид

$$3(x-2)+0(y-1)-3(z-4)=0\Rightarrow 3x-6-3z+12=0\Rightarrow 3x-3z+6=0 .$$

Для построения плоскости средствами Octave преобразуем уравнение плоскости к виду функции двух переменных:

$$Ax+By+Cz+D=0\Rightarrow z(x,y)=-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C},$$

$$z(x,y)=b_0+b_1x+b_2y,\ b_0=-\frac{A}{C},\ b_1=\frac{-B}{C},\ b_2=\frac{-D}{C}.$$

Решение задачи представлено в листинге 6.16 и на рис. 6.10

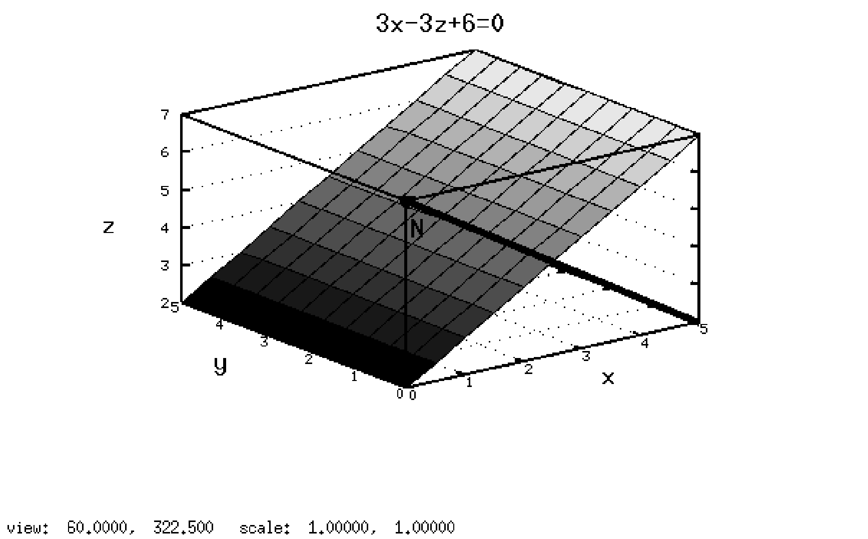

Рисунок *6.10*. Изображение плоскости и ее направляющего вектора

```
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
axis([0,10,0,10,0,10])
%Параметры плоскости
A=3;B=0;C=-3;D=6;N=[A,B,C];
%Параметры уравнения плоскости,
%преобразованного к функции двух переменных
b0=-D/C;b1=-A/C;b2=-B/C;
%Построение плоскости
xk=5;yk=5;
X=0:0.5:xk;Y=0:0.5:yk;
[x,y]=meshgrid(X,Y);
z=b0+b1*x+b2*y;
surf(x,y,z), colormap gray
grid on;
xlabel('x','FontSize',20);
ylabel('y','FontSize',20);
zlabel('z','FontSize',20);
set(gca,'FontSize',12);
set(gca,'box','on');
%Построение направляющего вектора
line([xk,0],[0,0],[b0,yk+b0],'LineWidth',5,'Color','k');
line([0,0],[0,0],[yk+b0,yk+b0],
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','v','markersize',16);
text(0+0.3,0+0.3,yk+b0-1,'N','FontSize',20);
%Заголовок
title('3x-3z+6=0','FontSize',20)
```

Листинг 6.16

Если плоскость походит через заданную точку $M_1(x_{1,} y_{1,} z_1)$ и параллельна плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, то ее уравнение записывают так

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \quad .$$

ЗАДАЧА 6.14. Записать уравнение и построить плоскость, проходящую через точку $M_0(1,3,5)$ параллельно плоскости $3x-3z+6=0$.

Уравнение плоскости имеет вид:

$$3(x-1)-3(z-5)=0 \Rightarrow 3x-3-3z+15=0 \Rightarrow 3x-3z+12=0$$

Решение задачи показано на рис. 6.11и в листинге 6.17.

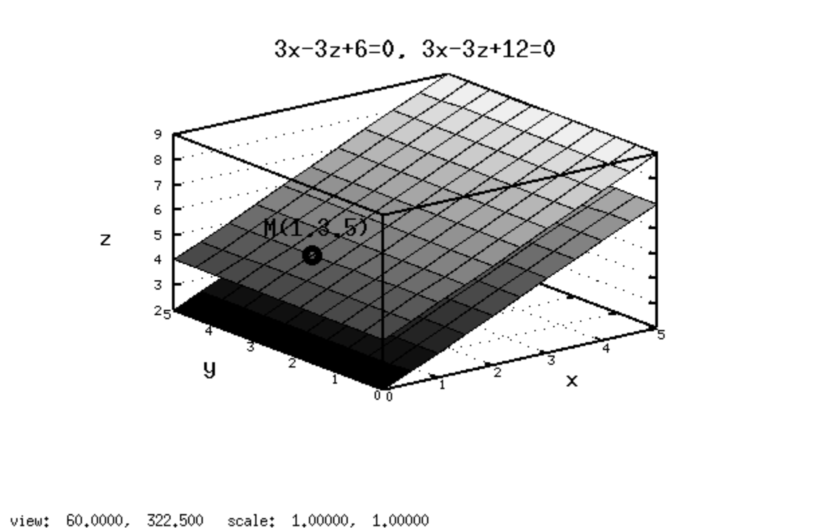

Рисунок *6.11.* Параллельные плоскости

```
function p=plos(A,B,C,D)
%Параметры уравнения плоскости,
%преобразованного к функции двух переменных
b0=-D/C;b1=-A/C;b2=-B/C;
%Построение плоскости
xk=5;yk=5;
X=0:0.5:xk;Y=0:0.5:yk;
[x,y]=meshgrid(X,Y);
z=b0+b1*x+b2*y;
surf(x,y,z), colormap gray
grid on;
p=0;
end;
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
axis([0,10,0,10,0,10])
%Параметры плоскости
A1=3;B1=0;C1=-3;D1=6;
%Построение плоскостей
plos(A1,B1,C1,D1)
hold on
A2=3;B2=0;C2=-3;D2=12;
p=plos(A2,B2,C2,D2)
xlabel('x','FontSize',20);
```

```
ylabel('y','FontSize',20);
zlabel('z','FontSize',20);
set(gca,'FontSize',12);
set(gca,'box','on');
%Изображение точки
M=[1,3,5];
line([M(1),M(1)],[M(2),M(2)],[M(3),M(3)],
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','o','markersize',16);
text(M(1)-0.5,M(2)+0.5,M(3)+1,'M(1,3,5)','FontSize',20);
title('3x-3z+6=0, 3x-3z+12=0','FontSize',20)
```

Листинг 6.17

Если три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ не лежат на одной прямой, то уравнение плоскости, проходящей через них, представляется уравнением:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0 \; .$$

ЗАДАЧА 6.15. Записать уравнение и построить плоскость, проходящую через точки $M_0(1,2,3)$, $M_1(2,1,2)$ и $M_2(3,3,1)$.

Заданные точки не лежат на одной прямой, так как векторы $\overrightarrow{M_0 M_1}$ и $\overrightarrow{M_0 M_2}$ не коллинеарны. Рис. 6.12 и рис. 6.13 доказывают это утверждение. Изображение на рис. 6.12 получено в результате работы программы показанной в листинге 6.18. Рис. 6.13 получен из рис. 6.12 путем поворота в графическом окне.

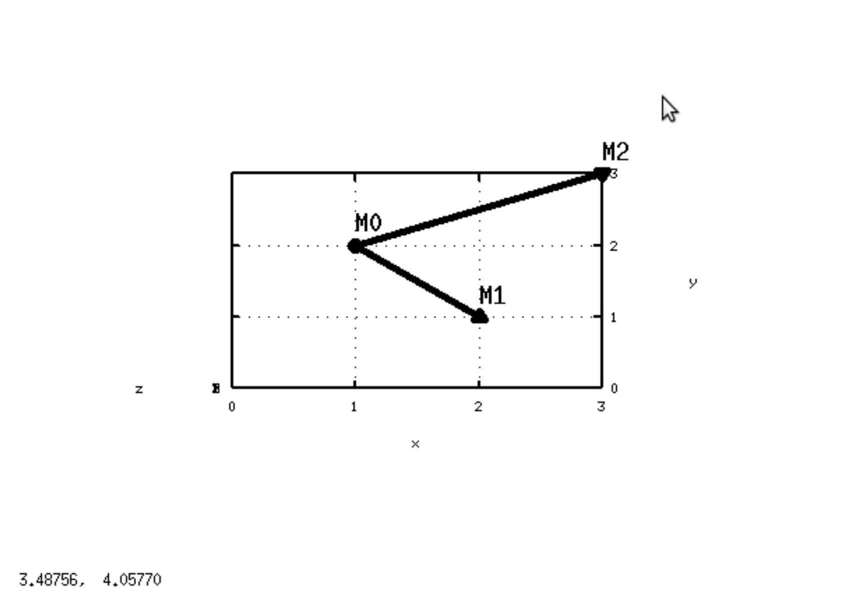

Рисунок 6.12. Иллюстрация к задаче 6.15 (векторы на плоскости)

```
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'xlim',[0,3]);
set(gca,'ylim',[0,3]);
set(gca,'zlim',[0,3]);
set(gca,'xtick',[0:3]);
```

```
set(gca,'ytick',[0:3]);
set(gca,'ztick',[0:3]);
set(gca,'box','on');
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
axis([0,3,0,3,0,3])
grid on;
%Исходные данные
M0=[1,2,3];M1=[2,1,2];M2=[3,3,1];
%Изображение векторов M0M1 и M0M2
line([M1(1),M0(1)],[M1(2),M0(2)],[M1(3),M0(3)],
                              'LineWidth',5,'Color','k');
line([M2(1),M0(1)],[M2(2),M0(2)],[M2(3),M0(3)],
                              'LineWidth',5,'Color','k');
%Изображение стрелок на векторах
line([M1(1),M1(1)],[M1(2),M1(2)],[M1(3),M1(3)],
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','>','markersize',10);
line([M2(1),M2(1)],[M2(2),M2(2)],[M2(3),M2(3)],
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','<','markersize',10);
line([M0(1),M0(1)],[M0(2),M0(2)],[M0(3),M0(3)],
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','o','markersize',10);
%Подписи
text(M0(1),M0(2)+0.3,M0(3),'M0','FontSize',20);
text(M1(1),M1(2)+0.3,M1(3),'M1','FontSize',20);
text(M2(1),M2(2)+0.3,M2(3),'M2','FontSize',20);
```

Листинг 6.18

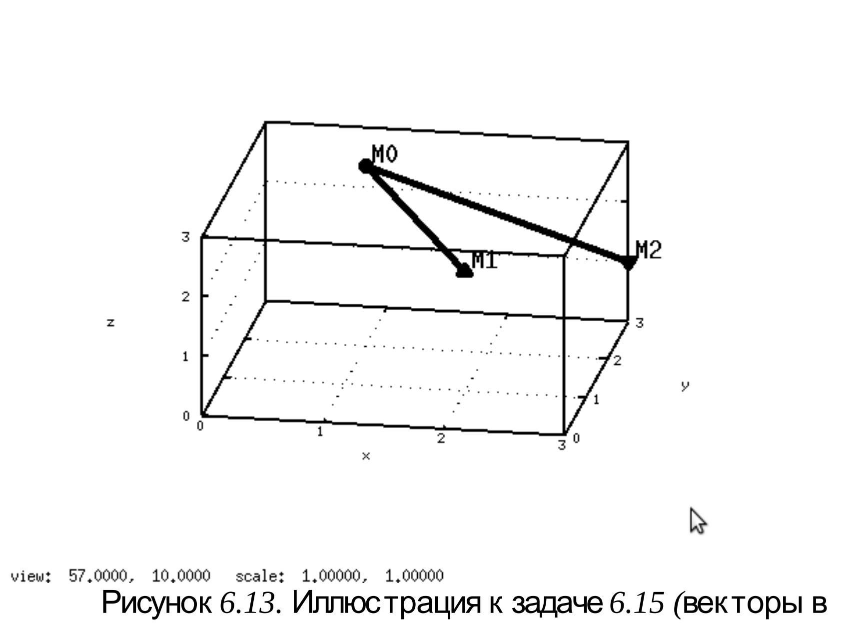

Рисунок *6.13*. Иллюстрация к задаче *6.15* (векторы в пространстве)

Плоскость представлена уравнением:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+z-4=0 \quad .$$

Графическое решение задачи показано на рис. 6.14. Текст программы в листинге 6.19.

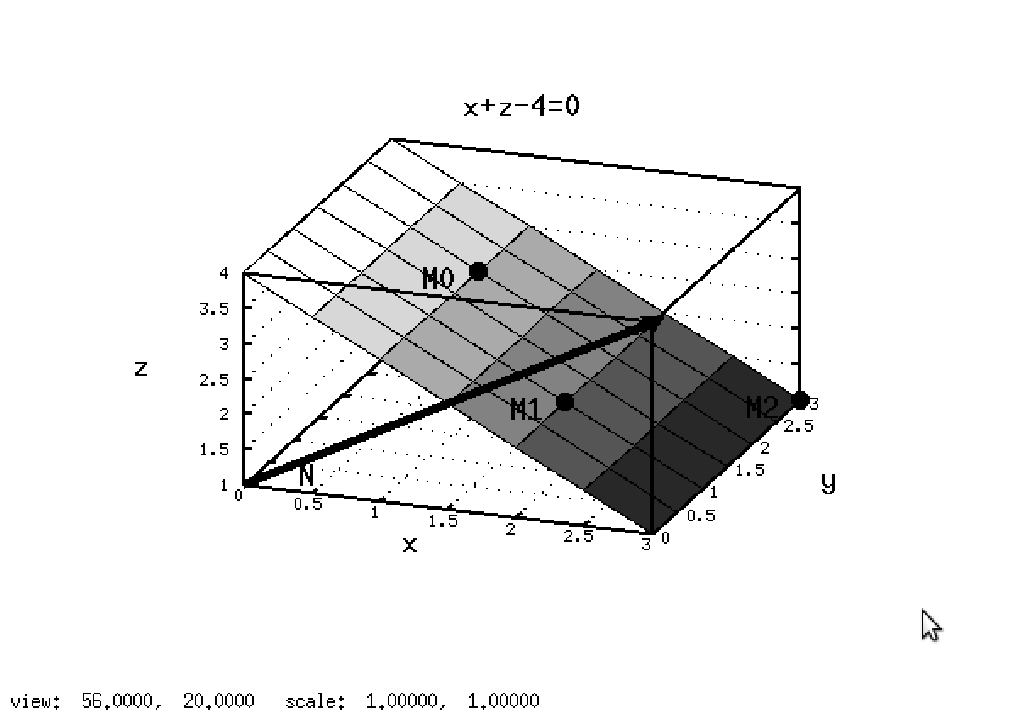

Рисунок *6.14*. Плоскость, проходящая через три точки

```
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
axis([0,10,0,10,0,10])
%Параметры плоскости
A=1;B=0;C=1;D=-4;N=[A,B,C];
%Параметры уравнения плоскости,
%преобразованного к функции двух переменных
b0=-D/C;b1=-A/C;b2=-B/C;
%Построение плоскости
xk=3;yk=3;
X=0:0.5:xk;Y=0:0.5:yk;
[x,y]=meshgrid(X,Y);
z=b0+b1*x+b2*y;
surf(x,y,z), colormap gray
grid on;
xlabel('x','FontSize',20);
ylabel('y','FontSize',20);
zlabel('z','FontSize',20);
set(gca,'FontSize',12);
set(gca,'box','on');
%Построение направляющего вектора
line([xk,0],[0,0],[b0,b0-yk],'LineWidth',5,'Color','k');
line([xk,xk],[0,0],[b0,b0],
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','v','markersize',16);
text(0+0.3,0+0.3,b0-yk,'N','FontSize',20);
%Исходные данные
M0=[1,2,3];M1=[2,1,2];M2=[3,3,1];
%Нанесение точек на график
line([M1(1),M1(1)],[M1(2),M1(2)],[M1(3),M1(3)],
```

```
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','o','markersize',10);
line([M2(1),M2(1)],[M2(2),M2(2)],[M2(3),M2(3)],
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','o','markersize',10);
line([M0(1),M0(1)],[M0(2),M0(2)],[M0(3),M0(3)],
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','o','markersize',10);
%Подписи
text(M0(1)-0.3,M0(2)-0.3,M0(3),'M0','FontSize',20);
text(M1(1)-0.3,M1(2)-0.3,M1(3),'M1','FontSize',20);
text(M2(1)-0.3,M2(2)-0.3,M2(3),'M2','FontSize',20);
%Заголовок
title('x+z-4=0','FontSize',20)
```

Листинг 6.19

Если плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ не параллельна оси **OX** ($A\neq 0$), то она отсекает на этой оси отрезок $a=-\frac{D}{A}$. Аналогично отрезки на осях **OY, OZ** будут $b=-\frac{D}{B},(B\neq 0),$ и $c=-\frac{D}{C},(C\neq 0)$. Таким образом, плоскость отсекающую на осях отрезки *a*, *b* и *c* можно представить уравнением $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, которое называется *уравнением плоскости в отрезках*.

ЗАДАЧА 6.16. Написать уравнение плоскости $3x-6y+2z-12=0$ в отрезках и построить эту плоскость.

Найдем длины отрезков:

$$a=-\frac{D}{A}=-\frac{-12}{3}=4\ ,\quad b=-\frac{D}{B}=-\frac{-12}{-6}=-2\ ,\quad c=-\frac{D}{C}=-\frac{-12}{3}=6\ .$$

Запишем уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1$$

Решение задачи показано на рис. 6.15 и в листинге 6.20.

```
clf;cla;
a=4;b=-2;c=6;
set(gcf,'Position',[50,50,400,400]);
axis([0,a,0,b,0,c]);
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
X=0:0.2:a;Y=b:0.2:0;
[x y]=meshgrid(X,Y);
z=c-c/a*x-c/b*y;
hfig=surf(x,y,z);
set(hfig,'FaceColor','none','EdgeColor','k')
%Изображение векторов a, b и c
line([0,a],[0,0],[0,0],'LineWidth',5,'Color','k');
line([0,0],[0,b],[0,0],'LineWidth',5,'Color','k');
line([0,0],[0,0],[0,c],'LineWidth',5,'Color','k');
%Подписи
text(a/2,0,1,'a','FontSize',20);
text(0,b/2,1,'b','FontSize',20);
text(0.2,0,c/2,'c','FontSize',20);
%Заголовок
title('a=4, b=-2, c=6','FontSize',14)
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
```

```
set(gca,'View',[25 22])
```

Листинг 6.20

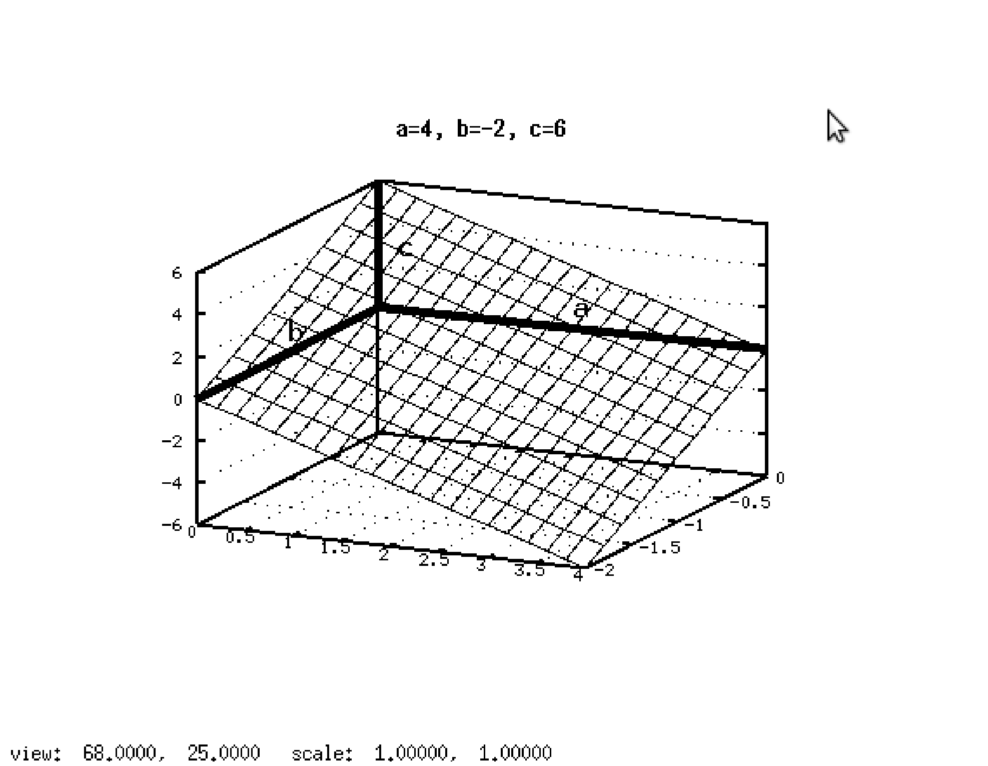

Рисунок *6.15*. Плоскость, заданная отрезками

Рассмотрим *особые случаи положения плоскости относительно системы координат:*

- Уравнение $Ax+By+Cz=0,(D=0)$ представляет плоскость, проходящую через начало координат.
- Уравнение $Ax+By+D=0,(C=0)$ представляет плоскость параллельную оси **OZ**, уравнение $Ax+CZ+D=0,(B=0)$ - плоскость, параллельную оси **OY**, уравнение $By+CZ+D=0,(A=0)$ - плоскость, параллельную оси **OX**.
- Уравнение $Ax+D=0,(B=0,C=0)$ представляет плоскость параллельную координатной плоскости **YOZ**, уравнение $By+D=0,(A=0,C=0)$ - плоскость, параллельную плоскости **XOZ**, уравнение $CZ+D=0,(A=0,B=0)$ - плоскость, параллельную оси **XOY**.
- Уравнения $X=0,Y=0,Z=0$ представляют собой плоскости **YOZ**, **XOZ** и **XOY**.

ЗАДАЧА 6.17. Построить плоскости $x+y-1=0$, $x-z+1=0$, $y+z+2=0$, $x-y+2=0$, $2x+3=0$, $3y-2=0$.

Ход решения задачи описан в листинге 6.21. Графическое решение показано на рис. .

```
function p=plos(A,B,C,D)
%Параметры плоскости
M=[A,B,C];
d=[0.1,0.1,0.1];
if A==0
      M(1)=1;
end;
if B==0
```

```
        M(2)=1;
    end;
    if C==0
        M(3)=1;
    end;
    if A<0
        d(1)=-0.1;
    end;
    if B<0
        d(2)=-0.1;
    end;
    if C<0
        d(3)=-0.1;
    end;
    X=0:d(1):M(1);
    Y=0:d(2):M(2);
    Z=0:d(3):M(3);
    %Построение плоскости
    if C!=0
    %Параметры уравнения плоскости,
    %преобразованного к функции двух переменных z(x,y)
        [x,y]=meshgrid(X,Y);
        b0=-D/C;b1=-A/C;b2=-B/C;
        z=b0+b1*x+b2*y; f1=surf(x,y,z); colormap gray
    else
    if B!=0
    %Параметры уравнения плоскости,
    %преобразованного к функции двух переменных y(x,z)
        [x,z]=meshgrid(X,Z);
        b0=-D/B;b1=-A/B;b2=-C/B;
        y=b0+b1*x+b2*z; f1=surf(x,y,z); colormap gray
    else
    %Параметры уравнения плоскости,
    %преобразованного к функции двух переменных x(y,z)
        [y,z]=meshgrid(Y,Z);
        b0=-D/A; b1=-B/A; b2=-C/A;
        x=b0+b1*y+b2*z; f1=surf(x,y,z); colormap gray
    end;
    end;
    grid on;
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    zlabel('z');
    set(gca,'xtick',[0:M(1)]);
    set(gca,'ytick',[0:M(1)]);
    set(gca,'ztick',[0:M(3)]);
    set(gca,'box','on');
    p=f1;
    end;
    % конец функции
```

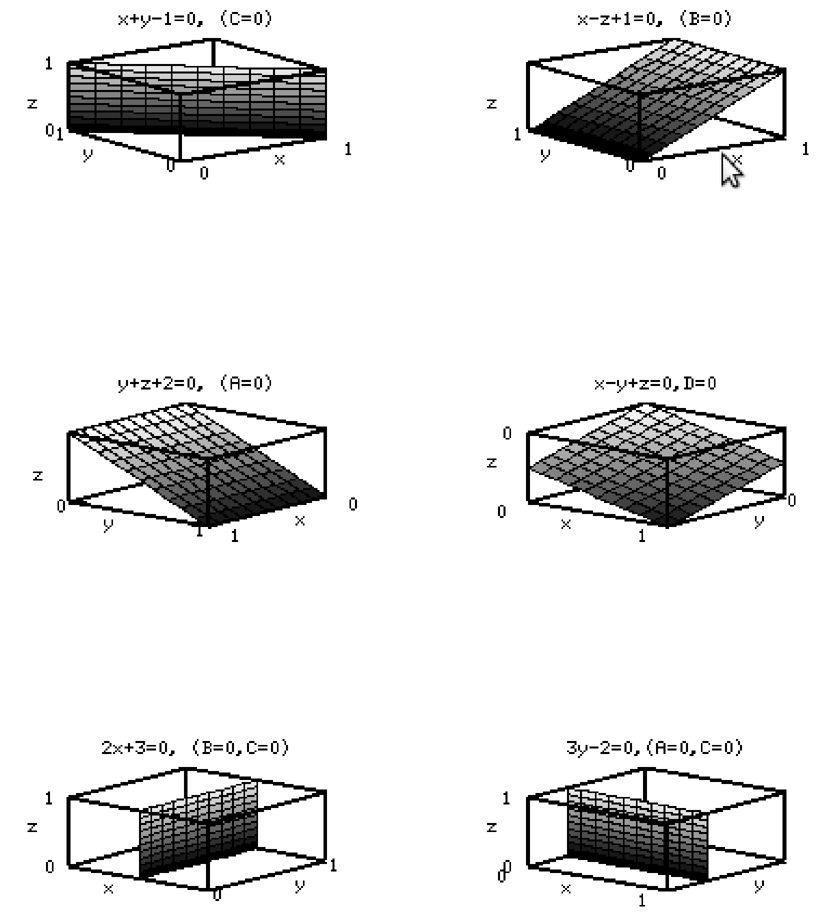

Рисунок *6.16*. Особые случаи положения плоскости относительно системы координат

```
%Изображение плоскостей заданных в задаче 6.17
clf;cla;
subplot(3,2,1);
%Плоскость x+y-1=0
A1=1;B1=1;C1=0;D1=-1;
plos(A1,B1,C1,D1)
title('x+y-1=0, (C=0)')
subplot(3,2,2);
%Плоскость x-z+1=0
A2=1;B2=0;C2=-1;D2=1;
plos(A2,B2,C2,D2)
title('x-z+1=0, (B=0)')
subplot(3,2,3);
%Плоскость y+z+2=0
```

```
A3=0;B3=1;C3=1;D3=2;
p=plos(A3,B3,C3,D3)
title('y+z+2=0, (A=0)')
set(gca,'View',[130 30])
%Плоскость x-y+z-2=0
subplot(3,2,4);
A4=1;B4=-1;C4=1;D4=0;
plos(A4,B4,C4,D4)
set(gca,'View',[40 30])
title('x-y+z=0,D=0')
%Плоскость 2x+3=0
subplot(3,2,5);
A5=2;B5=0;C5=0;D5=3;
plos(A5,B5,C5,D5)
set(gca,'View',[40 30])
title('2x+3=0, (B=0,C=0)')
%Плоскость 3y-2=0
subplot(3,2,6);
A6=0;B6=3;C6=0;D6=-2;
plos(A6,B6,C6,D6)
set(gca,'View',[40 30])
title('3y-2=0,(A=0,C=0)')
```

Листинг 6.21

Расстояние от точки $M_1(x_{1,} y_{1,} z_1)$ *до плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$ равно абсолютному значению величины $d=\frac{|Ax_1+Bx_2+Cx_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

ЗАДАЧА 6.18. Найти расстояние от точки $M_1(3,9,1)$ до плоскости $x-2y+2z+3=0$.

Решение показано в листинге 6.22.

```
%Исходные данные
A=1;B=-2;C=2;D=-3;
M=[3,9,1];
N=[A;B;C];
%Расстояние от точки M(3,9,1) до плоскости x-2y+2z-3=0
d=abs(M*N+D)/norm(N)
>>>d =  5.3333
```

Листинг 6.22

Две плоскости $A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0$ и $A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0$ образуют четыре *двугранных угла*, равных попарно. Один из них всегда равен углу между нормальными векторами $\vec{N}_1\{A_{1,} B_{1,} C_1\}$ и $\vec{N}_2\{A_{2,} B_{2,} C_2\}$. Вычисляют любой из двугранных углов по формуле

$$\cos(\phi)=\pm\frac{A_1 A_2+B_1 B_2+C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} ,$$

причем выбирая «+» получаем $\cos(\widehat{N_1 N_2})$, выбирая «-» получаем $\cos(180-\widehat{N_1 N_2})$.

ЗАДАЧА 6.19. Найти угол между плоскостями $x-y+\sqrt{2}z+2=0$ и $x+y+\sqrt{2}z-3=0$.

Решение показано в листинге 6.23.

```
%Исходные данные
```

```
N1=[1,-1,sqrt(2)];
N2=[1,1,sqrt(2)];
%Угол между плоскостями
fi=acos(dot(N1,N2)/norm(N1)/norm(N2));
fi_1=round(fi*180/pi)
fi_2=180-fi_1
%Решение
>>>fi_1 =  60
>>>fi_2 =  120
```

Листинг 6.23

Два уравнения $A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0$ и $A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0$ представляют *прямую линию*, если коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 (то есть плоскости не параллельны). Если коэффициенты A_1, B_1, C_1 пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2, но свободные члены не подчинены той же пропорции $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}\neq\frac{D_2}{D_1}$, то заданные уравнения не представляют никакого геометрического образа. Если все четыре величины пропорциональны $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}$, то заданные уравнения представляют одну и ту же плоскость.

ЗАДАЧА 6.20. Построить прямые линии, заданные уравнениями $2\mathrm{x}-y=0$ и $x+y-1=0$, $x-y+z-1=0$ и $2\mathrm{x}-2\mathrm{y}+2\mathrm{z}-2=0$, $2\mathrm{x}-7\mathrm{y}+12\mathrm{z}-4=0$ и $4\mathrm{x}-14\mathrm{y}+24\mathrm{z}-12=0$.

Решение показано в листинге 6.24. Для построения плоскости применялась функция `plos(A,B,C,D)`, описанная в задаче 6.17.

```
function flag=line_(N1,N2)
if N1(1)==0
      k1=0;
else
      k1=N2(1)/N1(1);
end;
if N1(2)==0
      k2=0;
else
      k2=N2(2)/N1(2);
end;
if N1(3)==0
      k3=0;
else
      k3=N2(3)/N1(3);
end;
if N1(4)==0
      k4=0;
else
      k4=N2(4)/N1(4);
end;
if  ( k1!= k2) | (k2 != k3)
      flag=0
      clf;cla;
      plos(N1(1),N1(2),N1(3),N1(4));
```

```
      hold on
      plos(N2(1),N2(2),N2(3),N2(4));
elseif  (k1 == k2) & (k2 == k3) &  (k3 == k4)
      flag=1;
      clf;cla;
      plos(N1(1),N1(2),N1(3),N1(4));
elseif  (k1 == k2) & (k2 == k3) &  (k3 != k4)
      flag=2;
      disp('Геометрическая фигура не определена!')
end;
end;
%Пример 1
A1=2;B1=-1;C1=0;D1=0;
A2=1;B2=1;C2=0;D2=-1;
n1=[A1,B1,C1,D1];
n2=[A2,B2,C2,D2];
line_(n1,n2)
title('2x-y=0, x+y-1=0');
set(gca,'View',[110 30]);
```

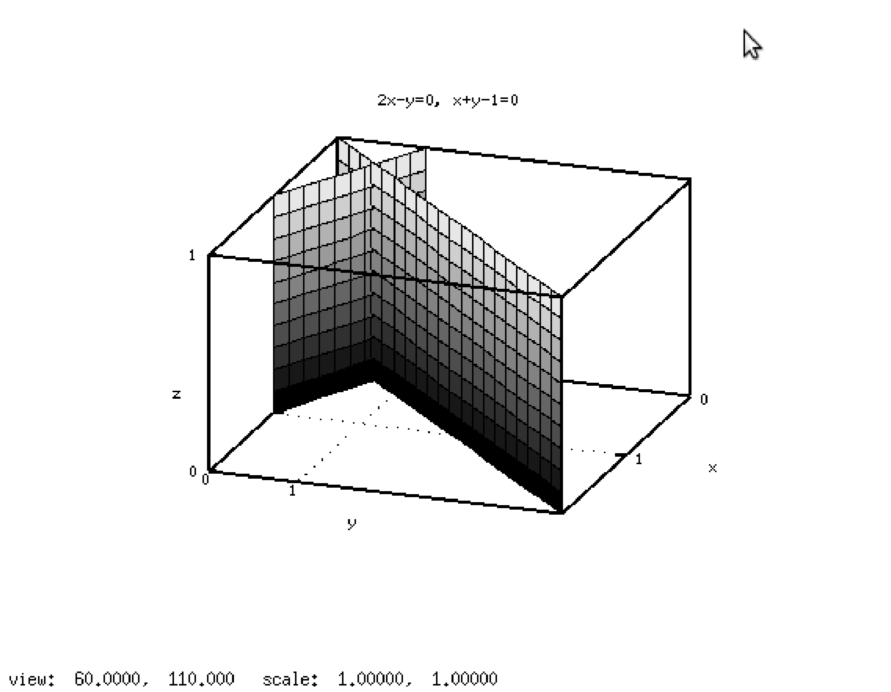

Рисунок *6.17*. Геометрическая интерпретация задачи *6.20* (пример *1*)

```
%Пример 2
A1=1;B1=-1;C1=1;D1=-1;
A2=2;B2=-2;C2=2;D2=-2;
n1=[A1,B1,C1,D1];
n2=[A2,B2,C2,D2];
line_(n1,n2)
title('x-y+z-1=0, 2x-2y+2z-2=0');
set(gca,'View',[60 30]);
```

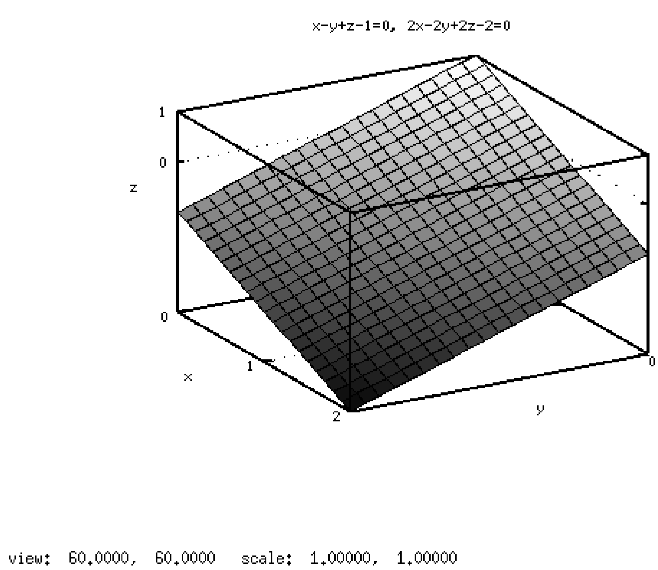

Рисунок *6.18*. Геометрическая интерпретация задачи *6.20 (*пример *2)*

```
%Пример 3
A1=2;B1=-7;C1=12;D1=-4;
A2=4;B2=-14;C2=24;D2=-12;
n1=[A1,B1,C1,D1];
n2=[A2,B2,C2,D2];
line_(n1,n2)
%Результат работы пример 3
>>>Геометрическая фигура не определена!
```

Листинг 6.24

Всякий вектор $\vec{a}\{l,m,n\}$, лежащий на прямой (или параллельный ей), называется *направляющим вектором* этой прямой. Координаты $\{l,m,n\}$ называются *направляющими коэффициентами* прямой. За направляющий вектор прямой $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ можно принять векторное произведение $\vec{N}_1\times\vec{N}_2$, где $\vec{N}_1=\{A_{1,}B_{1,}C_1\},\vec{N}_2=\{A_{2,}B_{2,}C_2\}$ - нормальные векторы плоскостей, образующих прямую.

ЗАДАЧА 6.21. Найти направляющие коэффициенты прямой $2x-2y-z+8=0$ и $x+2y-2z+1=0$ (листинг 6.25).

```
N1=[2,-2,-1];N2=[1,2,-2];
%Расчет координат векторного произведения
M=[N1;N2];
M1=M(1:2,2:3);M2=[M(:,1),M(:,3)];M3=M(1:2,1:2);
a(1)=det(M1);
a(2)=-det(M2);
a(3)=(det(M3));
a
%Векторное произведение
>>>a =
   6   3   6
```

Листинг 6.25

Прямая L, проходящая через точку $M_0(x_{0,}y_{0,}z_0)$ и имеющая направляющий вектор $\vec{a}\{l,m,n\}$ представляется уравнениями $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$. Эти уравнения выражают коллинеарность векторов $\overrightarrow{M_0M_1}\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$, $\vec{a}\{l,m,n\}$ и называются *каноническими уравнениями прямой*.

Уравнения $x=x_0+lt, y=y_0+mt, z=z_0+nt$ называют *параметрическими уравнениями прямой*. Здесь величина *t* является *параметром* и принимает различные значения.

ЗАДАЧА 6.22. Записать параметрическое уравнение прямой, проходящей через две точки $A(5,-3{,}2)$ и $B(3{,}1,-2)$.

Если в качестве направляющего вектора выбрать вектор $\overrightarrow{AB}=\{3-5{,}1-(-3),-2-2\}=\{-2{,}4,-4\}$, то каноническое уравнение будет иметь вид $\frac{x-5}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-4}$, следовательно параметрическое уравнение запишем так $x=5+2t, y=-3+4\text{t}, z=2-4\text{t}$.

Команды, которые применялись для графического решения задачи (рис. 6.19) показаны в листинге 6.26.

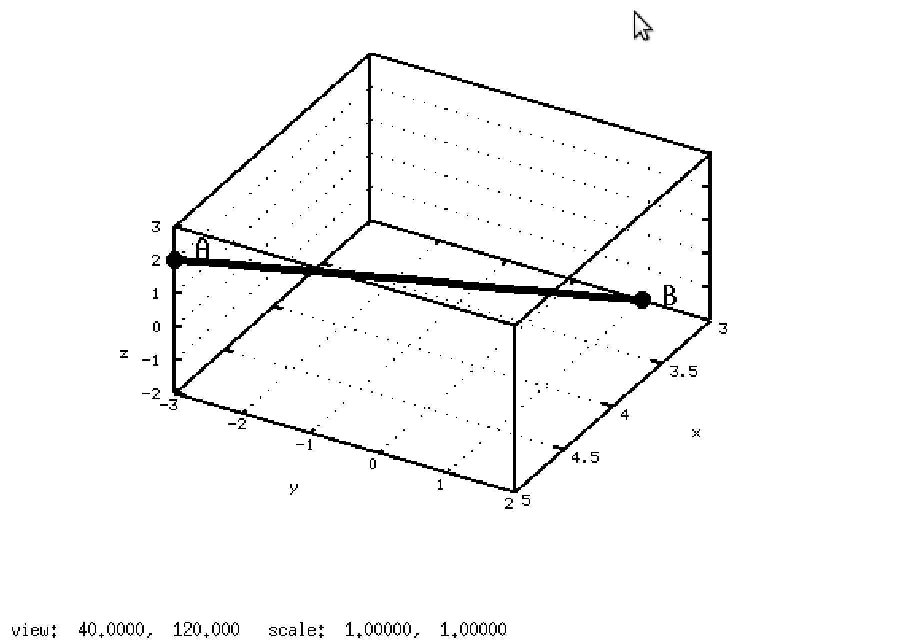

Рисунок *6.19*. Прямая, проходящая через две точки

```
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
%axis([0,3,0,3,0,3])
grid on;
%Исходные данные
A=[5,-3,2];B=[3,1,-2];
t=0:0.1:1;
x=5-2*t; y=-3+4*t; z=2-4*t;
%Изображение прямой
line(x,y,z,'LineWidth',5,'Color','k');
%Изображение точек
```

```
line([A(1),A(1)],[A(2),A(2)],[A(3),A(3)],
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','o','markersize',10);
line([B(1),B(1)],[B(2),B(2)],[B(3),B(3)],
  'LineWidth',5,'Color','k','marker','o','markersize',10);
%Подписи
text(A(1),A(2)+0.3,A(3)+0.5,'A','FontSize',20);
text(B(1),B(2)+0.3,B(3)+0.3,'B','FontSize',20);
set(gca,'View',[120 50]);
```

Листинг 6.26

Если известны направляющие векторы двух прямых $\vec{a}\{l,m,n\}$ и $\vec{b}\{l',m',n'\}$, то угол между этими прямыми можно вычислить по формуле

$$\cos(\phi)=\pm\frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+'^2}}.$$

ЗАДАЧА 6.23. Найти угол между прямыми $x=t, y=2t, z=3t$ и $x=-1+2t, y=1+t, z=-1+4t$ (листинг 6.27, рис. 6.20).

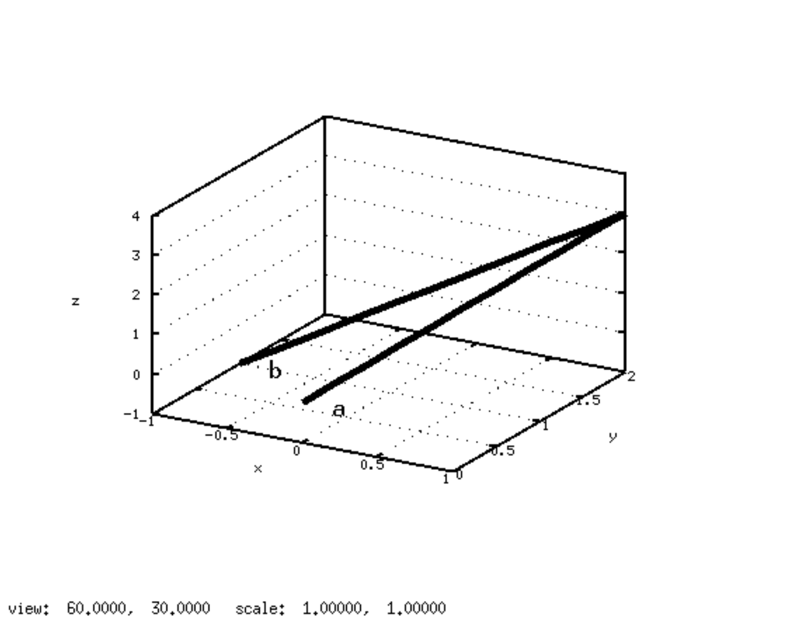

Рисунок *6.20*. Угол между прямыми

```
%Исходные данные
a=[1,2,3];b=[2,1,4];
fi=acos(dot(a,b)/norm(a)/norm(b));
fi_1=round(fi*180/pi)
clf;cla;
set(gcf,'Position',[20,20,400,400]);
set(gca,'Position',[.1,.1,.8,.8]);
set(gca,'box','off');
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
%axis([0,3,0,3,0,3])
grid on;
t=0:0.1:1;
x=-1+2*t; y=1+t; z=-1+4*t;
%Изображение прямой
line(x,y,z,'LineWidth',5,'Color','k');
%Подписи
```

```
text(-0.8,1,-1,'b','FontSize',20);
x=t; y=2*t; z=3*t;
%Изображение прямой
line(x,y,z,'LineWidth',5,'Color','k');
%Подписи
text(0.2,0,0,'a','FontSize',20);
set(gca,'View',[60 320])
%Результат
>>>fi_1 =  21
```

Листинг 6.27

Прямая $x=x_0+l\,t\,,y=y_0+mt\,,z=z_0+nt$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ могут иметь одну общую точку, могут не иметь общих точек (прямая параллельна плоскости) и иметь бесконечное множество общих точек (прямая лежит на плоскости). *Общую точку* (если такая существует) плоскости и прямой можно вычислить, если подставить уравнение прямой в уравнение плоскости и найти значение параметра *t*.

ЗАДАЧА 6.24. Найти точку пересечения прямой $x=-5+3t\,,y=3-t\,,z=-3+2\mathrm{t}$ с плоскостью $2\mathrm{x}+3\mathrm{y}+3\mathrm{z}-8=0$.

Выполним расчеты в технике символьных вычислений (листинг 6.28).

```
symbols
%Определение символьных переменных
x = sym ("x") ;
y = sym ("y");
z = sym ("z");
t = sym ("t");
%Параметрическое уравнение прямой
x=-5+3*t;
y=3-t;
z=-3+2*t;
%Уравнение плоскости
f=2*x+3*y+3*z-8
%Вычисление значения параметра t
t = symfsolve(f,0)
%Определение точки пересечения прямой и плоскости
x=-5+3*t
y=3-t
z=-3+2*t
%Результаты вычислений
%Уравнение плоскости, выраженное через параметр t
>>>f =
-18.0+(9.0)*t
%Значение параметра t
>>>t =  2.0000
%Точка пересечения прямой и плоскости
>>>x =  1.00000
>>>y =  1.0000
>>>z =  1.00000
```

Листинг 6.28